٥٤٠٣٤

مبادئ علم الاستاتيكا

المؤلفون

أ.د. فكري محمد حادي　　د. حمدان عبدالظاهر حسين

د. عصام أدفاوي محمد

مكتبة الرشد

ناشرون

١٤٢٦- ٢٠٠٥م

ح مكتبة الرشد، ١٤٢٦هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

حادي، فكري محمد - حسين عبدالظاهر حمدان - محمد عصام ادفاوي

مبادئ علم الاستاتيكا / فكري محمد حادي - حمدان عبدالظاهر حسين - عصام محمد ادفاوي. الرياض ١٤٢٦هـ

٢١٩ص، ١٧ × ٢٤سم

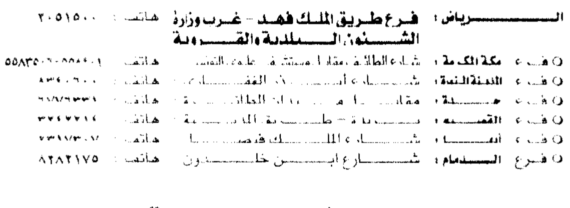
ردمك: X - ٣٩١ - ٠١ - ٩٩٦٠

١- الرياضيات ٢- الاستاتيكا أ. العنوان

ديوي ٥١٠ ١٤٢٦/٥١٧٣

رقم الإيداع:

ردمك: X - ٣٩١ - ٠١ - ٩٩٦٠

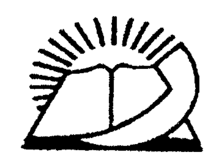


فروع المكتبة داخل المملكة

- الرياض: فرع طريق الملك فهد - غرب وزارة الشئون البلدية والقروية هاتف: ٢٠٥١٥٠٠
- فرع مكة المكرمة: شارع الطائف مقابل ميدان ... هاتف: ٥٥٨٣٥٠٦ - ٥٥٨٤٠١
- فرع المدينة المنورة: شارع أبي ذر الغفاري هاتف: ٨٣٤٠٦٠٠
- فرع جدة: مقابل ميدان الطائرة هاتف: [illegible]
- فرع القصيم: بريدة - طريق المدينة هاتف: ٣٢٤٢٢١٤
- فرع أبها: شارع الملك فيصل هاتف: ٢٣١٧٣٠٧
- فرع الدمام: شارع ابن خلدون هاتف: ٨٢٨٢١٧٥

وكلاؤنا في خارج المملكة

- الكويت: مكتبة الرشد - حولي هاتف: ٢٦١٢٣٤٧
- القاهرة: مكتبة الرشد - مدينة نصر هاتف: ٢٧٤٤٦٠٥
- بيروت: دار ابن حزم هاتف: ٧٠١٩٧٤
- المغرب: الدار البيضاء / مكتبة العلم هاتف: ٣٠٣٦٠٩
- تونس: دار الكتب الشرقية هاتف: ٨٩٠٨٨٩
- اليمن: صنعاء: دار الآثار هاتف: ٦٠٣٢٥٦
- البحرين: مكتبة الغرباء هاتف: ٩٥٧٨٣٣
- الإمارات: الشارقة - مكتبة الصحابة هاتف: ٥٦٣٣٥٧٥
- سوريا: دمشق - دار الفكر هاتف: ٢٢١١١١٦
- قطر: مكتبة ابن القيم هاتف: ٤٨٦٣٥٣٣
- الأردن: عمان - دار الفكر هاتف: ٤٦٥٤٧٦١



مكتبة الرشد

ناشرون

المملكة العربية السعودية

الرياض

شارع الأمير عبد الله بن عبد الرحمن

(طريق الحجاز)

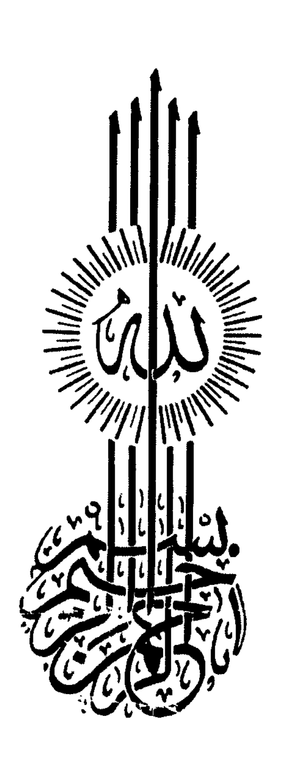
ص.ب: ١٧٥٢٢ - الرياض ١١٤٩٤

هاتف: ٤٥٩٣٤٥١

فاكس: ٤٥٧٣٣٨١

E-mail : alrushd@alrushdryh.com

www. rushd.com





الميكانيكا الكلاسيكية

الاستاتيكا

المؤلفـــون

أ . د . فكري محمد حادي

د . حمدان عبد الظاهر حسين

د . عصام أدفاوي محمـــد



مُقَدِّمَة

الحمد لله القائل في محكم آياتــه { وما أوتيتم من العلم إلا قليلا }
صدق الله العظيم والصلاة والسلام على نبينا محمد القـــائل "**مـــن ســـلك طريقاً يلتمس فيه علماً سهل الله له طريقاً إلى الجنـــة**". إذ نقــدم هــذا الكتاب لأبنائنا الطلاب بكليات التربية والعلوم ليغطي مقـــرر الاســـتاتيكا ويكون مرجعا باللغة العربية يسهل للدارس مفردات علم الاستاتيكا، لذلـك قدمنا فيه عرضا متماسكا وشاملاً للمفاهيم الأساســـية لعلـــم الاســـتاتيكا، وحاولنا تقديم أيسر الطرق وأوضحها لتحليل أساسيات هــذا العلـــم مـــع التركيز على كثرة وتنوع الأمثلة المحلوله وغير المحلوله لتعميق قـــدرة الدارس على استيعاب المفاهيم الأساسية لعلم الاستاتيكا. فقدمنا في البـــاب الأول فكرة مبسطة وشاملة لجبر المتجهات وما للمتجهات من تطبيقـــات متنوعة في الميكانيكا والهندسة. وزيلنا الباب بمجموعـــة متنوعـــة مـــن الأمثلة المحلوله.

وفي الباب الثاني قدمنا عرضاً شاملاً لقوانين الاتـــزان ودراســـة اتزان الأجسام في مستوى وفي الفراغ مع تنوع طرق الحلول التحليليـــة والهندسية التي تعمق قدرة الدارس على استيعاب المفاهيم الأساسية لعلـــم الاستاتيكا، كما سيجد الدارس في الفصل الثالث دراسة شـــاملة لإيجـــاد مركز الكتلة للأجسام المتماسكة المستوية والفراغية، كما يتضمن البـــاب

الرابع دراسة اتزان الأجسام الخشنة ومفهوم الاحتكـــاك ومـــا لـــه مـــن تطبيقات في الحياة العملية.

وأخيراً نأمل أن يكون هذا الكتاب سهل الفـــهم ســـلس الأســـلوب وإسهاما متميزاً ويؤدي الغاية المرجوة من تأليفه. وإن كان هناك أوجـــه للخطأ والقصور فنرجو التنبيه إلى مواضعها حتى نتمكن مـــن تلافيـــها مستقبلا إن شاء الله، ونسأل الله العلي القدير أن يوفقنا لمـــا فيـــه الخـــير لبلادنا العربية والإسلامية، ويجعل هذا العمل خالصـــاً لوجهـــه الكريـــم والله الموفق

المؤلفون

المحتويات

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة :

إن مادة الميكانيكا هي العلم الذي يختص بدراسة الحركة وتعتبر الخطوة الأولى لدراسة الطبيعة النظرية والتي تبحث في تفسير الظواهر الطبيعية بطريقة نظرية بشرط أن تتفق مع ما تسفر عنه هذه الطريقة مع نتائج التجارب العملية والمشاهدات الطبيعية. وتنقسم مادة الميكانيكا إلى عدة أقسام تبعاً لطبيعة الأجسام وطريقة دراسة حركتها فمثلاً منها الميكانيكا الكلاسيكية التي ستكون بمشيئة الله هي موضوع هذا الكتاب. والنظرية النسبية العامة التي تختص بدراسة حركة الأجسام الماكروسكوبية (ذات الأبعاد الكبيرة)، ومنها الميكانيكا الكمية وهي تختص بدراسة حركة الأجسام الميكروسكوبية (ذات الأبعاد الصغيرة).

سنقصر دراستنا في هذا الكتاب على النوع الأول وهو الميكانيكا الكلاسيكية المبنية أساساً على قوانين نيوتن الثلاثة والتي تعتمد على إدخال مفهوم القوة وإعتبار الزمن مطلق لا يتغير من راصد إلى آخر أي لا يعتمد على إطار الإنتساب.

الميكانيكا الكلاسيكية تنقسم بدورها إلى عدة أقسام فيمكن تقسيمها إلى الديناميكا والإستاتيكا ـ أما الديناميكا فتنقسم إلى :

١ـ الكينماتيكا (Kinematics)

وهي التي تختص بدراسة وصف الحركة للأجسام دون التعرض للمؤثرات (القوى) التي تغير من حالة هذه الحركة أي تبحث في تحديد

مواضع الأجسام ومساراتها وسرعاتها وعجلاتها على مر الزمن.

٢ـ الكيناتيكا (Kinetics) :

هو ذلك الفرع من علم الديناميكا الذي يبحث في نوع الحركة التـــي يتخذها الجسيم مع الأخذ في الإعتبار مسببات هذه الحركة من القوى.

وأما **الإستاتيكا** فهو العلم الذي يختص بدراسة حالة الأجسام وعلاقتها بالقوى المؤثرة عليها أي يبحث في إتزان الأجسام وسكونها تحـــت تـــأثير مجموعة من القوى. وهي في الواقع تعتبر المحور الأساسي فـــي التعليـــم الهندسي لأنه يتأسس عليها الكثير مـــن العلـــوم الهندسـيـة فـــي مختلـــف التخصصات.

بمشيئة الله سنورد في هذا الكتاب الأسس الاستاتيكية العامة.

ويشتمل الكتاب على العديد من الأمثلة المحلولة لكي تكون نموذجـــاً للدارسين لتكون معيناً لهم في الإلمام بالمبادئ الاســـتاتيكية والتطبيـــق فـــي المسائل الواقعية. وسوف نخصص باب كامل للمتجهات لما لها من أهميـــة كبرى في فهم ودراسة المواضيع الإستاتيكية.

الباب الأول

المتجهات Vectors

الكميات القياسية والكميات المتجهة :

تنقسم الكميات في الطبيعة إلى قسمين هما : —

أ — كميات قياسية :

وهي الكميات التي لا تتغير بتغير الراصد والتي يمكن أن نمثلها بعدد ذات وحدات متفق عليها.

والأمثلة عديدة على هذه الكميات القياسية وهي الكتلة، الطول، العرض، الارتفاع، المساحة، الحجم، الكثافة، الزمن، الزاوية، والشغل، الطاقة، درجة الحرارة، القدرة، ... ونرمز لهذه الكميات عادة برموز معتادة. وتخضع هذه الكميات للعمليات الجبرية العادية للأعداد ويمكن تمثيلها هندسياً على خط الأعداد بنقط. فمثلاً إذا كانت درجة حرارة يوم ما هي 15^{o}- وفي يوم آخر 25^{o} فمثلها على الخط 15^{o}- وعند 25+ الأولى عند النقطة A والأخرى عند النقطة B. وهكذا.

ب — كميات متجهة :

وهي الكميات التي يلزم لكي تحددها تحديداً تاماً هو تحديد إتجاهها فضلاً عن تحديد مقدارها العددي.

وسنطلق على مقدارها العددي اسم مقياس أو مقدار أو طول المتجه.

ومن الأمثلة على هذه الكميات ــ الإزاحة ــ السرعة ــ العجلــة ــ القوة ــ العزم ــ الدفع ــ كمية الحركة ــ شدة المجال الكـهربي ــ شـدة المجال المغناطيسي، ... وكلها كميات لا يتـم التعـرف عليـها إلا بذكـر إتجاهها.

وتمثل الكميات المتجهة هندسياً بأجزاء من قطع مسـتقيمة موجهـة تسمى خطوط عمل المتجهات، ونضع سهم يبين عليه إتجاه المتجه في الفراغ وطول هذه الخطوط تعبر عن مقدار أو مقياس المتجـه. ونرمـز للمتجـه برموز معتادة ولكن نضع عليها سهم أو تحتها خط.

فمثلاً إذا كتبنا المتجه الواصل بين النقطتيـن A, B فيكتب على الصورة $\overrightarrow{AB}$ أو $\underline{AB}$ ، ونرمز له بالرمز $\overrightarrow{A}$ أو $\underline{A}$ ونقـول أن $\overrightarrow{A}$ هو المتجه الواصل من النقطة A إلـى النقطة B.

أما قيمة المتجه فيعبر عنها بالرمز مجـرداً من أي سهم أي A أو AB وفـي بعـض الأحيان نرمز له $\|\overrightarrow{A}\|$ أو $\|\overrightarrow{AB}\|$.

وواضح أن مقدار أو مقياس المتجه دائماً كمية موجبة.

أنواع المتجهات :

أ ــ متجهات حرة :

وهي متجهات يمكن مد خط عملها كما يمكن نقلها موازية لنفسها

وفي الحالتين تظل محتفظة بمقدارها.

ب ــ متجهات مقيدة بخط عمل :

وهي متجهات تعمل في خط محدد وبالتالي لا يمكن نقلها في اتجاه موازي لها ولكن يمكن نقلها في اتجاه إمتداد خط عملها. ويعتبر متجه القوة المؤثرة على جسم متماسك مثالاً واضحاً على هذا النوع.

جـ ــ متجهات مقيدة بنقطة تأثير :

وهي متجهات تعمل في خطوط محددة وتؤثر عند نقطة معينة ويعتبر متجه القوة المؤثرة على جسم مرن أو مائع مثالاً واضحاً لهذا النوع.

سندرس في هذا الباب المتجهات التي من النوع الأول وهي المتجهات الحرة وللاختصار لن نذكر أن المتجه هو متجه حر.

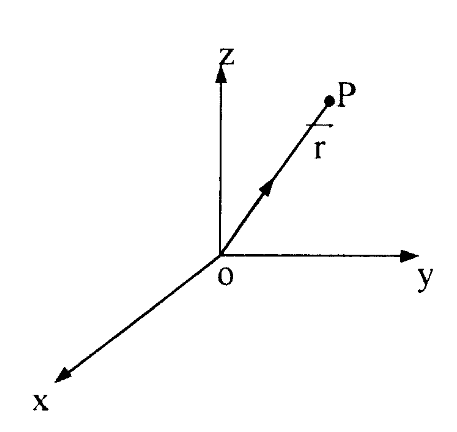
ومن أمثلة المتجهات الهامة التي ستقابلنا في دراستنا ما يلي :

١ــ متجه الإزاحة :

هو المتجه الذي يحدد مقدار واتجاه انتقال النقطة المادية أو الجسم في الفراغ ولذا يعتبر من أهم المتجهات.

٢ــ متجه الموضع :

هو المتجه الذي يحدد موضع النقطة في الفراغ وهو عبارة عن متجه إزاحته هذه النقطة من بداية الإحداثيات إلى موضعها ويرمز له عادة بالرمز $\overline{r}$.



٣ـ متجهي السرعة وكمية الحركة :

تعرف سرعة النقطة المادية بأنها معدل تغير متجه موضعها بالنسبة للزمن، أما كمية الحركة فهي حاصل ضرب الكتلة (كمية قياسية) في متجه السرعة.

٤ـ متجهي العجلة والقوة :

العجلة هي معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن. أما القوة فيمكن تحديدها من قانون نيوتن الثاني حيث تتناسب مع معدل تغير كمية الحركة بالنسبة للزمن.

٥ـ متجه المساحة :

وهو المتجه المحدد قيمته المطلقة بمقدار المساحة واتجاهه عمودي على هذه المساحة في الجانب الذي يتحدد تبعا لنوع المسألة المطروحة.

والآن قبل بحث خواص وطرق التعامل مع الكميات الإتجاهية يجب التمييز بين نوعين من مجموعات الإسناد (المحاور) وسنعتبر أنها دائما في الترتيب oxyz.

z, o, x, y

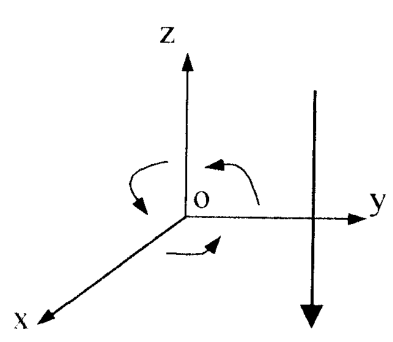
١ـ المجموعة اليمينية : وهي كما بالشكل المقابل يمكن التعرف عليها بإحدى الطرق الآتية :

أ ـ عند النظر من الجهة الموجبة لأحد المحاور (تكون الاتجاهات الموجبة للمحورين الآخرين أمام الراصد) نجد أن المحور الذي

يليه على يسار الراصد.

ب ــ دوران المجموعة حول أحد المحاور (بالنسبة لنفس الراصد) ليحل المحور الذي يليه محل المحور الآخر عن أقصر طريق يكون في اتجاه دوران عقارب الساعة.

جـ ــ يمكن تمييزها أيضا بقاعدة اليد اليسرى وذلك بجعل أصابع اليد اليسرى الثلاثة الإبهام والسبابة والوسطى متعامد كل منهم على الآخر لتمثل الثلاث محاور على الترتيب x - y - z.



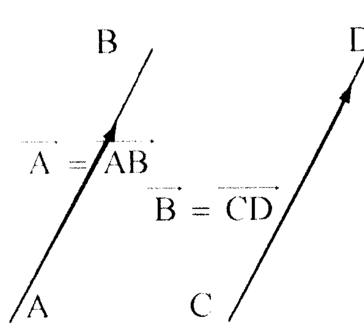
٢ــ المجموعة اليمنى : وهي كما بالشكل المقابل يمكن التعرف عليها بنفس الطرق السابقة ففي الطريقة الأولى يجد الراصد المحور على يمينه، وفي الثانية يكون الدوران في اتجاه عكس دوران عقارب الساعة. أما في الثالثة فتستخدم اليد اليمنى.

يلاحظ أن تغيير إشارة الإحداثيات $(r \to -r)$ يكافئ الإنتقال من إحدى المجموعتين إلى الأخرى.

بعض الخصائص والخواص للمتجهات الحرة :

(١) المتجه لا يتغير إذا إزيح موازيا لنفسه مع المحافظة على طوله.

يقال أن المتجه $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{AB}$ هو نفسه المتجه $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{CD}$ إذا كان طول $\overrightarrow{A}$ مساويا لطول $\overrightarrow{B}$ وإتجاه $\overrightarrow{A}$ هو نفسه (أو موازيا) لاتجاه $\overrightarrow{B}$ ونعبر عن ذلك بأن :



$$\vec{A} = \vec{B}$$
$$\therefore \quad \vec{AB} = \vec{CD}$$

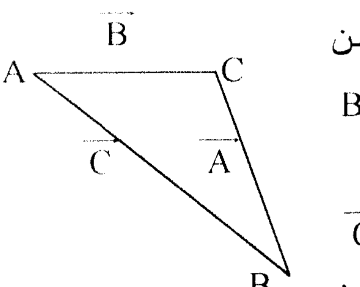
(٢) المتجه المساوي لمتجه ما $\vec{A}$ في المقدار ولكن مضاد له في الاتجـــــاه يسمى بسالب المتجه $\vec{A}$ ونرمز له بالرمز $\vec{A}$ - مع ملاحظة أن

$$|\vec{A}| = |-\vec{A}| = A$$

فإذا كان المتجه $\vec{A} = \vec{AB}$ فإن المتجه $-\vec{A} = -\vec{AB} = \vec{BA}$.

(٣) إذا ضربنا أي متجه $\vec{A}$ في عدد قياسي n مثلا نحصل على متجه آخر له نفس اتجاه المتجه $\vec{A}$ ولكن طوله يساوي n من المرات طول المتجـه $\vec{A}$.

(٤) إن جمع المتجهات :



يلاحظ أن الانتقال من B إلى A مثـــــلا يمكـــن النظر إليه على أنه انتقالين متتالين الأول من B إلى C والثاني من C إلى A

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

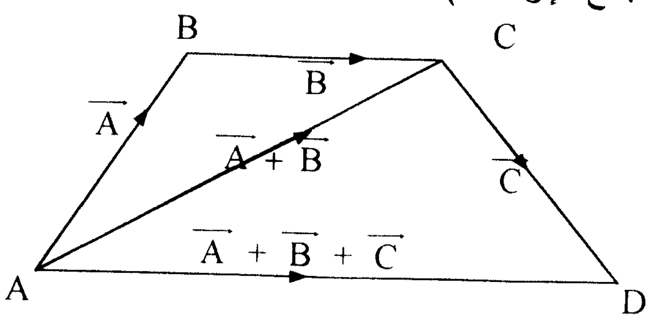
أي أن المتجه $\vec{C}$ يمثل حاصل جمع المتجـــهين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ وعندئذ يكون المستقيم الواصل بيـــن بداية المتجه $\vec{A}$ إلى نهاية المتجه $\vec{B}$ ممثلا للمتجه المطلوب $\vec{C}$.

والمثلث الذي نحصل عليه من ذلك يسمى مثلث المتجهات.

كذلك يمكن اعتبار جمع المتجهات على أنه لو أزيح جسم من موضع A إلى موضع B فإن $\overrightarrow{AB}$ هو متجه إزاحته فإذا أزيح من B إلى C ثم من C إلى نقطة أخرى D فهذا يعني أن الجسم كان عند A ثم أصبح عند D فيقال أن إزاحته العامة هي المتجه $\overrightarrow{AD}$ ويقال أن هذه الإزاحة مكونة من الإزاحات $\overrightarrow{AB}$ ثم $\overrightarrow{BC}$ ثم $\overrightarrow{CD}$ ونعبر عن ذلك بأن

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

(وهذه هي قاعدة جمع الإزاحات).



وتطبق هذه القاعدة على أي عدد من الإزاحات.

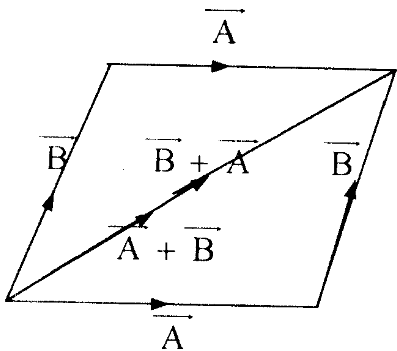
ويراعى أن يكون الانتقال على الأضلاع في اتجاه دوري واحد والمحصلة هي المتجه الذي يقفل المضلع في اتجاه مضاد للإتجاه الدوري.

(٥) القوانين الأساسية في جبر المتجهات :

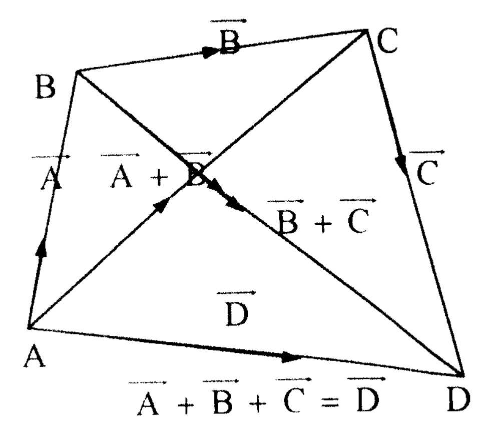
(أ) يتحقق قانون الإبدال بالنسبة للجمع

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}$$

ويمكن بسهولة إثبات ذلك من الرسم المجاور باستخدام قاعدة المثلث وقاعدة متوازي الأضلاع.



ب ـ يتحقق قانون الترتيب بالنسبة للجمع



$$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}=\overrightarrow{A}+\left(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}\right)$$
$$=\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right)+\overrightarrow{C}$$
$$=\overrightarrow{D}$$

ويمكن تحقيق ذلك أيضا من الرسم.

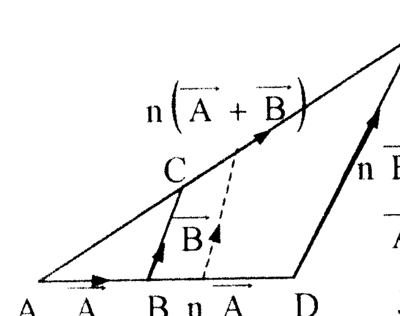
فمثلا :

$$\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$
$$\therefore\ \left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right)+\overrightarrow{C}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{D}$$

(جـ) يتحقق قانون التوزيع بالنسبة للضرب في عدد قياسي بمعنى أن

$$n\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right)=n\,\overrightarrow{A}+n\,\overrightarrow{B}$$

ويمكن تحقيق ذلك من الرسم مباشرة



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

فيكون
$$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=\overrightarrow{AC}$$

بأخذ متجه آخر $n\,\overrightarrow{A}$ يكون له نفس اتجاه $\overrightarrow{A}$ ولكن طوله = طول $\overrightarrow{A}$ n من المرات ونأخذ المتجه $n\,\overrightarrow{B}$ يوازي $\overrightarrow{B}$ وطوله يساوي $\overrightarrow{B}$ عدد n من المرات فيكون :

$$\overrightarrow{DE}=n\,\overrightarrow{B}\quad,\quad\overrightarrow{AD}=n\,\overrightarrow{A}$$

وحيث أن $BC \parallel DE$

∴ لابد أن تقع E على إمتداد C ونجد أن طول AE تساوي n من المـرات طول AC فتكون

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=n\,\overrightarrow{A}+n\,\overrightarrow{B}=n\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right)=\overrightarrow{AE}$$

(٦) المتجه الصفري :

إذا طرحنا أي متجه $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{AB}$ من نفسه فسوف نحصل على متجـه آخر يسمى بالمتجه الصفري ونرمز له بالرمز $\overrightarrow{O}$

$$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{A} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{O}$$

لأنه من جمع الإزاحات فإن النقطة سوف تزاح من A إلى B ثم تزاح مـن B إلى A مرة أخرى كأنها لو كانت النقطة لم تتحرك. بذلك نحصل علـى متجه صفري هذا المتجه لا طول له وليس له اتجاه أو غير محدد الاتجاه.

نلاحظ أنه إذا أضيف المتجه $\overrightarrow{O}$ لأي متجه لكان الناتج نفس المتجه

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{O} = \overrightarrow{A} \quad , \quad \overrightarrow{B} + \overrightarrow{O} = \overrightarrow{B}$$

وبذلك يمكن القول بأن $\overrightarrow{O}$ هو عنصر حيادي فـي مجموعـة المتجـهات بالنسبة للجمع ويقال أن المتجه $\overrightarrow{A}$ - هو المعكـوس الجمعـي فـي هـذه المجموعة بالنسبة لعملية الجمع.

(٧) متجه الوحدة :

إذا قسمنا أي متجه $\overrightarrow{A}$ مثلا إلى عدد من الأقسام المتساوية بحيث أن كل قسم من هذه الأقسام كان طوله الوحدة (أي نقسم $\overrightarrow{A}$ على A من الأقسام المتساوية) فمثلا إذا كان طول المتجه طوله 4 cm نقسمه إلى 4 أقسام وهكذا ... وبذلك فإن $\overrightarrow{A}$ سيكون هو مجموع عدد A من المتجهات المتساوية الذي طول كل منها الوحدة (وسنرمز لهذه المتجهات بالرمز $\overrightarrow{e}_A$)

$$\therefore \overrightarrow{A} = \overrightarrow{e}_A + \overrightarrow{e}_A + \ldots \quad \text{إلى عدد A منها}$$

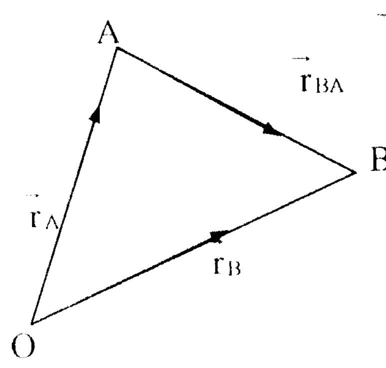
$$= A\,\overrightarrow{e}_A$$

وبذلك نحصل على متجه الوحدة في اتجاه أي متجه

$$\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \qquad \text{or} \qquad \vec{A} = A\,\vec{e}_A$$

$\vec{e}_A$ يسمى متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\vec{A}$.

العلاقة بين متجه الموضع ومتجه الإزاحة :



اعتبر جسيم أزيح من موضع A إلى موضع B فإن متجه إزاحته هو $\vec{AB}$ ويسمى متجه إزاحة B بالنسبة إلى النقطة A. ولكن إذا أزيح الجسيم من O إلى A فإن :

المتجه $\vec{OA}$ هو متجه موضع A. وأيضا المتجه $\vec{OB}$ هو متجه موضع النقطة B. سنرمز لمتجهي موضعB،A بالرموز $\vec{r}_A = \vec{OA}$ ، $\vec{r}_B = \vec{OB}$

من الرسم وبتطبيق خاصية المثلث في الجمع نجد أن :

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

$$\therefore \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

وسنرمز لمتجه إزاحة B بالنسبة إلى A بالرمز $\vec{r}_{BA}$

$$\therefore \quad \vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{AB}$$

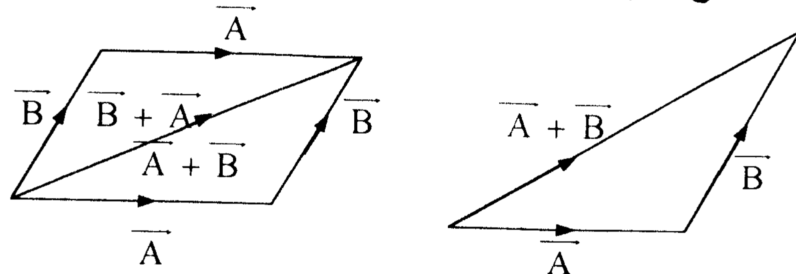
سوف نسمي متجه إزاحة B بالنسبة إلى A بمتجه موضع B بالنسبة إلى A وسيكون هذا المتجه في الاتجاه من A إلى B ويساوي الفرق بين متجهي موضع B، النقطة A.

إن المتجه $\vec{BA}$ هو متجه موضع A بالنسبة إلى B ويكون

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{BA}$$

قاعدة المثلث وقاعدة متوازي الأضلاع لجمع متجهين :

عند جمع متجهين $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ فإنه يمكن أن تنطبق نقطة بداية $\overrightarrow{A}$ على نقطة بداية $\overrightarrow{B}$ في هذه الحالة يكون المجموع هو المتجه الممثل بقطر متوازي الأضلاع الذي فيه $\overrightarrow{A}$ ، $\overrightarrow{B}$ ضلعان متجاوران.



أما إذا رسمنا المتجهين $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ بحيث تنطبق بداية المتجه $\overrightarrow{B}$ على نهاية المتجه $\overrightarrow{A}$ فإن المتجه $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ هو المتجه الواصل بين بداية $\overrightarrow{A}$ ونهاية $\overrightarrow{B}$.

إن حاصل الجمع بين متجهين هو عملية تبديلية ويمكن التحقق من ذلك بتطبيق قاعدة متوازي الأضلاع أو قاعدة المثلث.

ثلاثي متجهات الوحدة الأساسية المتعامدة :

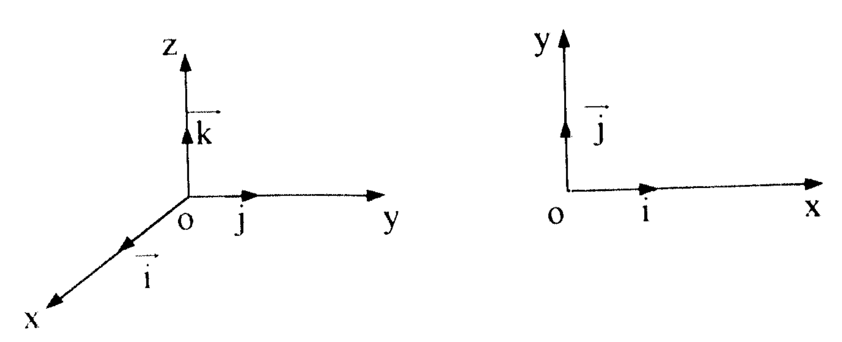
يطلق على متجهات الوحدة التي تنطبق على محاور الإحداثيات المأخوذة في اتجاه محور ox، محور oy ومحور oz بمتجهات الوحدة الأساسية المتعامدة ونرمز لها بالرمز $\overrightarrow{i}$ ، $\overrightarrow{j}$ ، $\overrightarrow{k}$ على الترتيب.

$\overrightarrow{i}$ متجه الوحدة في اتجاه المحور ox الموجب.

$\overrightarrow{j}$ ~ ~ ~ ~ oy ~ .

$\overrightarrow{k}$ ~ ~ ~ ~ oz ~ .

ويمكن التعبير عن أي متجه مستويا أو فراغيا بدلالـــــة متجـــهات الوحـــدة الأساسية

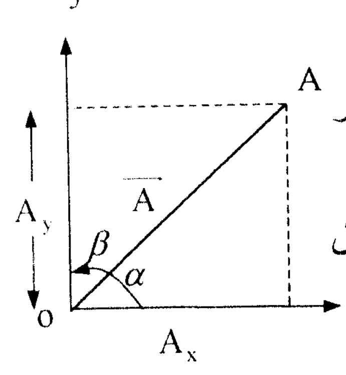


العمليات على المتجهات الحرة ـ جبر المتجهات Vector Algebra

أولا : تحليل المتجهات :

لأي متجه $\overrightarrow{A}$ مركبتان متعامدتان وهما مسقطا هذا المتجه على الاتجـــاهين المتعامدين ox, oy ويكون $A_x = A\cos\alpha$

$A_y = A\sin\alpha = A\cos\beta$



هم مركبتي $\overrightarrow{A}$ في الاتجاهين المتعامدين للمحاور

ويكون $\overrightarrow{A} = A_x\,\overrightarrow{i} + A_y\,\overrightarrow{j}$

وبالعكس إذا كان معلوم A_x , A_y فيمكن الحصول على المتجه حيث طوله يساوي

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

أما زاوية ميله على محور x الموجب فتعطى من $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{A_y}{A_x}$

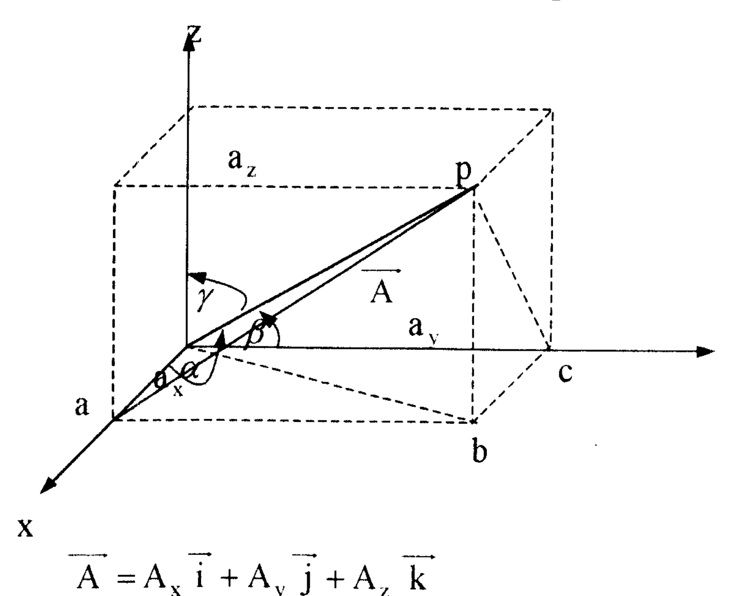
ملاحظة (١) : يمكن كتابة المتجه $\overrightarrow{A}$ الواقع في المســـتوى xy بـــالصورة (A,α°) حيث A هو طوله أو مقياس المتجه أما α فهي زاوية ميله علـــى

محور x الموجب.

(٢) إذا كان $\overrightarrow{A}\,,\,\overrightarrow{B}$ غير متوازيين فإن المتجه $\overrightarrow{C}=m\,\overrightarrow{A}+n\,\overrightarrow{B}$

سيكون واقع في مستوى (أو يوازي مستوى) المتجهين $\overrightarrow{A}$ ، $\overrightarrow{B}$ حيث أن محصلة أي مجموعة من المتجهات المستوية تقع في نفس المستوى للمجموعة وبالعكس فإن المتجه $\overrightarrow{C}$ الواقع في مستوى المتجهين $\overrightarrow{A}$ ، $\overrightarrow{B}$ يمكن تحليله إلى الاتجاهين $\overrightarrow{A}\,,\,\overrightarrow{B}$ على الصورة السابقة. وهذا التحليل يكون وحيد وبذلك فإن العلاقة السابقة تكون هي الشرط ا لضروري والكافي حتى يقع المتجهات الثلاثة $\overrightarrow{A}\,,\,\overrightarrow{B}\,,\,\overrightarrow{C}$ في مستوى واحد.

ويمكن تحليل المتجه $\overrightarrow{A}$ إلى مركبات ثلاثة في الفراغ وذلك بمعلومية طوله وزوايا ميله على المحاور الثلاثة فيكون $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{oa}+\overrightarrow{oc}+\overrightarrow{ob}$



$$\overrightarrow{A}=A_x\,\overrightarrow{i}+A_y\,\overrightarrow{j}+A_z\,\overrightarrow{k}$$

أي أن المتجه $\overrightarrow{oa}$ بفرض طوله هو A_x فيكون $\overrightarrow{oa}=A_x\,\overrightarrow{i}$

إذ أن متجه الوحدة في اتجاهه هو $\overrightarrow{i}$.

وهكذا بالنسبة للمتجهات $\overrightarrow{oc}$, $\overrightarrow{ob}$

وإذا كان زوايا ميل المتجه $\overrightarrow{A}$ على المحاور الثلاثة ox, oy, oz هي على الترتيب α, β, γ فيكون من هندسة الشكل

$$A_x = A\cos\alpha \quad , \quad A_y = A\cos\beta \quad , A_z = A\cos\gamma$$

وتكون المركبات A_x , A_y , A_z هي مساقط المتجه $\overrightarrow{A}$ على اتجاه المحاور الثلاثة. وهكذا يمكن وضع

$$\overrightarrow{A} = A\cos\alpha \ \overrightarrow{i} + A\cos\beta \ \overrightarrow{j} + A\cos\gamma \ \overrightarrow{k}$$

ويمكن إيجاد طول المتجه $\overrightarrow{A}$ أي $\left|\overrightarrow{A}\right|$ أو A من أن Δ oap قائم في $\hat{a}$

$$A^2 = op^2 = (oa)^2 + (ap)^2 = A_x^2 + (ab)^2 + (bp)^2$$

حيث أيضا Δ abp قائم الزاوية في b.

$$\therefore \ A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

وهكذا يكون طول أي متجه هو الجذر التربيعي لمجموع مربعات مركباته على المحاور الثلاثة. بذلك يمكن إيجاد العلاقة التي تربط بين الزوايا الثلاثة α, β, γ على الصورة :

$$A^2 = A^2\cos^2\alpha + A^2\cos^2\beta + A^2\cos^2\gamma$$

$$\therefore \ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

إن $\cos\alpha , \cos\beta , \cos\gamma$ تسمى بجيوب تمام اتجاه المتجه $\overrightarrow{A}$ ويكون مجموع مربعات جيوب تمام اتجاه أي متجه يساوي الواحد الصحيح.

أيضا يمكن إيجاد متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\overrightarrow{A}$ وذلك من حساب

$$\frac{\overrightarrow{A}}{A} = \overrightarrow{e}_A = \frac{A\cos\alpha \ \overrightarrow{i} + A\cos\beta \ \overrightarrow{j} + A\cos\gamma \ \overrightarrow{k}}{A}$$

$$\therefore \ \overrightarrow{e}_A = \cos\alpha \ \overrightarrow{i} + \cos\beta \ \overrightarrow{j} + \cos\gamma \ \overrightarrow{k}$$

أي أن المتجه الذي مركباته هي جيوب تمام اتجاه متجه ما.يكون هو متجـــه الوحدة في اتجاه هذا المتجه سنرمز لجيوب تمام اتجاه أي متجـــه بـــالرمز ℓ, m, n . إذا كانت p نقطة إحداثياتها (x, y, z) فإن المتجه $\overrightarrow{op}$ يكون هو

$$\overrightarrow{op} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \vec{r}_p$$

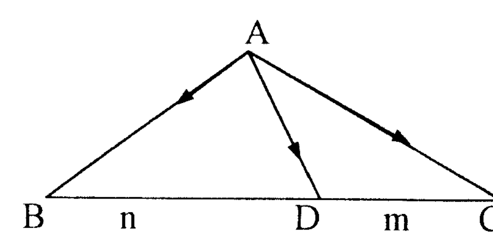
هو متجه موضع النقطة p.

مثال (١) : قاعدة مثلثية هامة :

المستقيمات AD, AC, AB في المثلث ABC حيـــث D نقطـــة علــى CB تقسمها بنسبة m : n يكون في هذا المثلث

$$m\,\overrightarrow{AB} + n\,\overrightarrow{AC} = (m+n)\,\overrightarrow{AD}$$

الحل : لدينا
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$



بضرب المعادلة الأولى في m والثانية في n والجمع

$$\therefore\ m\,\overrightarrow{AB} + n\,\overrightarrow{AC} = m\,\overrightarrow{AD} + m\,\overrightarrow{DB} + n\,\overrightarrow{AD} + n\,\overrightarrow{DC}$$
$$= (m+n)\,\overrightarrow{AD} + m\,\overrightarrow{DB} + n\,\overrightarrow{DC}$$

ولكن D تقسم CB بنسبة m : n فيكون $\frac{DC}{BD} = \frac{m}{n}$

$$\therefore\ m\,BD = n\,DC$$

فإذا جعلنا هذه المعادلة معادلة إتجاهية يجب أن يكون اتجاه المتجـــهين فـــي الطرفين واحد ويكون

$$m\,\overrightarrow{BD} = n\,\overrightarrow{DC}$$

وبالتعويض نحصل على

$$m\,\overrightarrow{AB} + n\,\overrightarrow{AC} = (m+n)\,\overrightarrow{AD} + m\,\overrightarrow{DB} + m\,\overrightarrow{BD}$$

$$m\,\overline{AB} + n\,\overline{AC} = (m+n)\,\overline{AD}$$

لأن $-m\,\overline{DB} = m\,\overline{BD}$

نتيجة :

(١) عندما $m = n$ فإن D ستكون منتصف BC ويصبح $m : n = 1 : 1$

فيكون $\overline{AB} + \overline{AC} = 2\,\overline{AD}$

(٢) يمكن اعتبار هذه العلاقة أنها عبارة عن تحليل متجه إلى اتجاهين في نفس المستوى فإذا وضعنا $\overline{a} = \overline{AB}$ ، $\overline{b} = \overline{AC}$ ، $\overline{c} = \overline{AD}$

$$\therefore\ \overline{AD} = \overline{C} = \frac{m}{m+n}\,\overline{a} + \frac{n}{m+n}\,\overline{b}$$

$$\overline{c} = \lambda\,\overline{a} + \mu\,\overline{b}$$

وهذه الصورة وحيدة لتحليل المتجة $\overline{c}$ إلى الاتجاهين $\overline{b}$, $\overline{c}$ في نفس المستوى.

يمكن إثبات أن هذه الصورة وحيدة بفرض صيغة أخرى لتحليل $\overline{c}$ على الصورة :

$$\overline{c} = \lambda'\,\overline{a} + \mu'\,\overline{b}$$

وبذلك بمساواة العلاقتين نجد أن :

$$\overline{c} = \lambda\,\overline{a} + \mu\,\overline{b} = \lambda'\,\overline{a} + \mu'\,\overline{b}$$

$$(\lambda - \lambda')\,\overline{a} = (\mu' - \mu)\,\overline{b}$$

وهذا يدل على أن $\overline{a}$ ، $\overline{b}$ في نفس الاتجاه وهذا مخالف للفرض أو يكون كل من الطرفين = صفر وبذلك يكون

$$\lambda = \lambda' \ ,\ \mu = \mu'$$

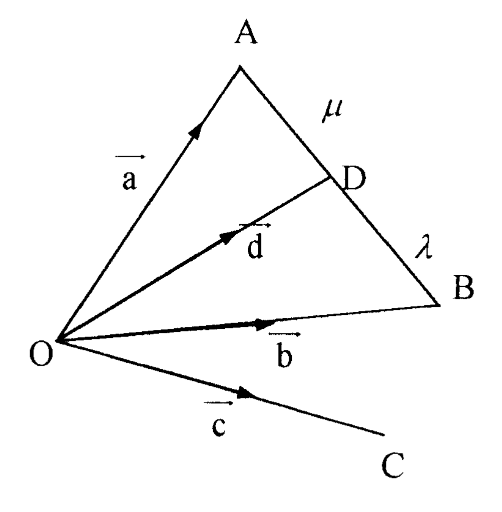
مثال (٢) : إذا حققت المتجهات الثلاثة $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ العلاقة

$$\lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b} + \nu \overrightarrow{c} = \overrightarrow{O}$$

حيث λ, μ, ν أعداد قياسية فإما أن يكون $\lambda = \mu = \nu = 0$ أو تكون المتجهات الثلاثة في مستوى واحد.



الحل :



نفرض المتجهات الثلاثة هي $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}\ , \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}\ , \overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$

بقسمة المسافة بين النقطتين A، B بنسبة $\lambda : \mu$ بواسطة D فيكون من المثال (١) أن :

$$\lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b} = (\lambda + \mu) \overrightarrow{d} \qquad (1)$$

وبالتعويض في الفرض في المسألة نجد أن :

$$\therefore (\lambda + \mu) \overrightarrow{d} + \nu \overrightarrow{c} = \overrightarrow{O}$$

$$(\lambda + \mu) \overrightarrow{d} = -\nu \overrightarrow{c} \qquad (2)$$

وهذا يدل على أنه إما أن يكون $\overrightarrow{d}, \overrightarrow{c}$ على استقامة واحدة

وبذلك يكون $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ في نفس المستوى أو يكون

$$\lambda + \mu = 0 \quad , \; \nu = 0 \Rightarrow \lambda = -\mu$$

وبالتعويض في (I) نحصل على أن

$$\lambda \; \overrightarrow{a} - \lambda \; \overrightarrow{b} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$$

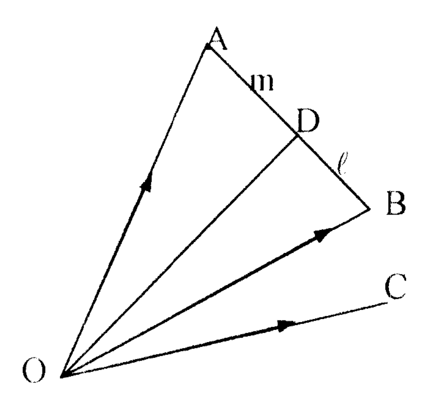
وهذا مخالف للفرض أن $\overrightarrow{a} , \overrightarrow{b}$ مختلفان. وبذلك نجد أنه لابد أن يكون $\lambda = \mu =$ صفر.

$\therefore$ إذا تحققت العلاقة المعطاة فإما أن يكون

(١) المتجهات الثلاثة في مستوى واحد.

(٢) أو $\lambda = \mu = \nu =$ صفر.

مثال (٣) : إذا كان $\ell \, \overrightarrow{OA} + m \, \overrightarrow{OB} + n \, \overrightarrow{OC}$ وكان لدينا $\ell + m + n = 0$ فاثبت أن النقط A, B, C على استقامة واحدة.



الحل : نصل AB في المثلث OAB فإذا قسمت D المستقيم AB بنسبة $m : \ell$ يكون $m \, \overrightarrow{OB} + \ell \, \overrightarrow{OA} = (m + \ell) \, \overrightarrow{OD}$ وبالتعويض في العلاقة المعطاة نحصل على

$$(m + \ell) \, \overrightarrow{OD} + n \, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O}$$

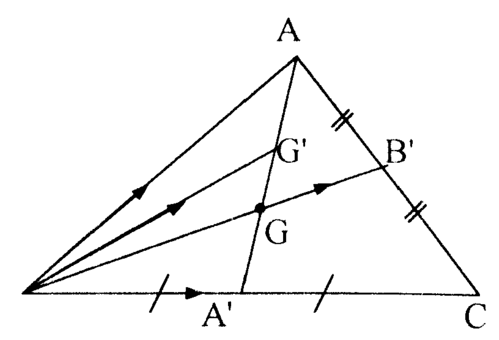
ولكن $\ell + m + n = 0$ نحصل على أن $\ell + m = -n$ فيكون

$$-n \, \overrightarrow{OD} + n \, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O}$$

$$\therefore \; \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$$

أي أن D هي نفسها النقطة C وبذلك يكون النقط A, B, C على استقامة واحدة.

مثال (٤) : باستخدام المتجهات اثبت أن المستقيمات المتوسطة في المثلث تتلاقى كلها في نقطة واحدة تقسم كل منها بنسبة 1 : 2 من جهة الرأس.



الحل : نفرض أن المثلث المعطى هو ABC وأن 'AA'، BB مستقيمان متوسطان تلاقيا في نقطة G.

إن لم تقسم G المستقيم 'AA بنسبة 1 : 2 فنفرض نقطة 'G تقسمه بهذه النسبة من جهة الرأس A فيكون في $\Delta ABA'$

$$1\,\overrightarrow{BA}+2\,\overrightarrow{BA'}=3\,\overrightarrow{BG'}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=3\,\overrightarrow{BG'} \qquad (1)$$

أيضا في المثلث ABC لدينا 'B منتصف AC فيكون

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\,\overrightarrow{BB'} \qquad (2)$$

من (1)، (2) نحصل على أن

$$\therefore\ 3\,\overrightarrow{BG'}=2\,\overrightarrow{BB'}$$

$$\overrightarrow{BB'}=\frac{3}{2}\,\overrightarrow{BG'} \qquad (3)$$

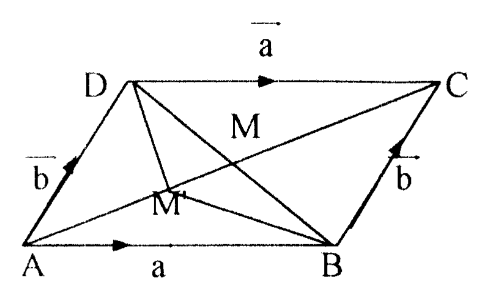
وهذه النتيجة تعني انطباق المتجه $\overrightarrow{BB'}$ على المتجه $\overrightarrow{BG'}$ وأن مقدار المتجه $\overrightarrow{BB'}$ = مرة ونصف المرة مقدار المتجه $\overrightarrow{BG'}$.

أي أن النقطة 'G تنطبق على النقطة G وتقسم 'AA بنسبة 1 : 2.

ويمكن إجراء نفس العمل على المستقيم المتوسط الثالث 'CC

∴ المستقيمات الثلاثة تتلاقى في نقطة واحدة تقسم كل منهم بنسبة 1 : 2 من جهة الرأس.

مثال (٥) : اثبت بطريقة المتجهات أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.



الحل : نفرض ABCD متوازي أضلاع، M نقطة تلاقي قطريه وأن

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}\ ,\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$

هم ضلعي المتوازي.

إذا لم تكن M تنصف القطرين نعتبر نقطة M' هي منتصف الضلع AC نصل DM' , BM'.

في المثلث ABC فيه M' منتصف AC فيكون

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = 2\ \overrightarrow{BM'} \qquad (1)$$

في المثلث ADC فيه M' منتصف AC فيكون

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = 2\ \overrightarrow{DM'} \qquad (2)$$

ولكن لدينا

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = -\ \overrightarrow{a}\ ,\quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}\ .$$

وبذلك تصبح (1)، (2) على الصورة

$$\overrightarrow{b} + \left(-\ \overrightarrow{a}\right) = 2\ \overrightarrow{BM'}\ ,\qquad -\ \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} = 2\ \overrightarrow{DM'}$$

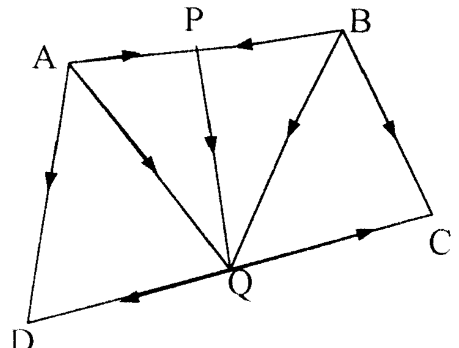
$$\therefore\ 2\ \overrightarrow{BM'} = -2\ \overrightarrow{DM'} \Rightarrow \qquad \overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{M'D}$$

وهذا يدل على أن المتجه $\overrightarrow{M'D}$ له نفس اتجاه $\overrightarrow{BM'}$ أي أن D, B, M' على استقامة واحدة أي M' تنطبق على M وأيضا يدل على أن المتجه $\overrightarrow{M'D}$ له طول = طول المتجه $\overrightarrow{BM'}$ أي أن M' التي هي تنصف المستقيم DB.

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن M تنصف أيضا القطر AC.

مثال (٦) : ABCD شكل رباعي فيه النقطة P منتصف الضلع AB والنقطة Q منتصف الضلع CD. أثبت أن $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\,\overrightarrow{PB}$





الحل :

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QD} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QC} \qquad (2)$$

ولكن P منتصف AB يكون

$$\overrightarrow{AP}=-\,\overrightarrow{BP} \qquad (3)$$

وأيضا Q منتصف CD يكون

$$\overrightarrow{QD}=-\,\overrightarrow{QC} \qquad (4)$$

بجمع (1)، (2) واستخدام (3)، (4) ينتج المطلوب.

يمكن حل المسألة بطريقة أخرى كالآتي :

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QD}$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{QC}$$

بالجمع

$$\therefore\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BQ}$$

في Δ AQB فيه P منتصف AB يكون

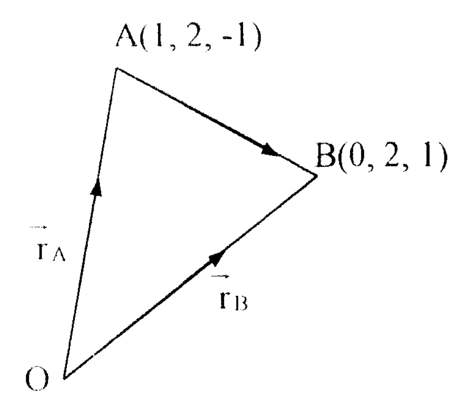
$$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}=2\,\overrightarrow{QP}$$

بالضرب في 1- نحصل على

$$\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BQ}=2\,\overrightarrow{PQ}$$

وبذلك ينتج المطلوب.

مثال (٧) : أوجد متجه الوحدة وطول المتجه الواصل من النقطة $A \equiv (1, 2, -1)$ إلى النقطة $B \equiv (0, 2, 1)$. أوجد أيضا زوايا ميله على محاور الإحداثيات.



الحل : إن متجه موضع النقطة A هو

$$\vec{r}_A = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

ومتجه موضع النقطة B هو

$$\vec{r}_B = 2\vec{j} + \vec{k}$$

بذلك فإن المتجه الواصل من A إلى B هو

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$
$$= (2\vec{j} + \vec{k}) - (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$$
$$= -\vec{i} + 2\vec{k}$$

بذلك يكون طول هذا المتجه هو $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5} = \sqrt{1+4}$

جيوب تمام اتجاه هذا المتجه هي

$$\ell = \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \quad m = \cos\beta = \frac{0}{\sqrt{5}}, \quad n = \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

أما متجه الوحدة في اتجاه هذا المتجه فيكون هو

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{-\vec{i} + 2\vec{k}}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$$

أما الزوايا التي يميل بها المتجه على محاور الإحداثيات فهي :

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{-1}{\sqrt{5}}, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$$

مثال (٨) : أوجد المتجه الذي طوله 2 وحدة ويميل بزوايا متساوية مع محاور الإحداثيات.

الحل : لدينا $\alpha = \beta = \gamma = \theta$ مثلا فيكون $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \cos\theta$

من العلاقة بين جيوب تمام اتجاه أي متجه لدينا

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$
$$\therefore\ 3\cos^2\theta = 1$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وهكذا يكون المتجه هو($\overline{a}$) مثلا

$$\overline{a} = a\cos\alpha\ \overline{i} + a\cos\beta\ \overline{j} + a\cos\gamma\ \overline{k}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{i} + \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{j} + \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{k}$$

مثال (٩) : أوجد المتجه الذي طوله 4 وحدات ويميل على محور ox بزاوية 45° وعلى محور oz بزاوية 120°.

الحل : لكي نوجد المتجه يجب معلومية جيوب تمام اتجاهه ℓ, m, n حيث

$$\ell = \cos\alpha = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$m = \cos\beta$ غير معلومة

$$n = \cos\gamma = \cos 120 = \cos(180 - 60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$$

ولكن لدينا

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$$
$$\therefore\ \frac{1}{2} + m^2 + \frac{1}{4} = 1 \ \Rightarrow\ m^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \cos^2\beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\beta = \pm\frac{1}{2}$$

أي أن β إما 60° أو $\beta = 120^{\circ}$ بذلك يوجد متجهين يحققان المسألة

$$\vec{a}_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}\right), \quad \vec{a}_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}\right).$$

تمارين

(١) إذا كانت G هي نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة في المثلث ABC وكانت H نقطة في مستوى المثلث أثبت أن

$$\overline{HG} = \frac{1}{3}\left(\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC}\right)$$

(٢) ABCD شكل رباعي فيه F, E نقطتان على BC, AD على الترتيب بحيث أن $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{m}{n}$ فبرهن على أن

$$n\,\overrightarrow{AB} + m\,\overrightarrow{DC} = (m+n)\,\overrightarrow{EF}.$$

(٣) ABCD مربع فيه F منتصف BC، E تقسم AD بنسبة 3 : 1 من جهة A أي $\frac{1}{3} = \frac{AE}{ED}$ فاثبت أن

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} + 2\,\overrightarrow{BD} = 3\,\overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{FE}$$

(٤) المثلث ABC فيه D نقطة على CB تقسمه بنسبة 2 : 1، H نقطة منتصف BC، O نقطة على BC بحيث BO : OC = 5 : 7 برهن على أن :

$$\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} + 3\,\overrightarrow{AH} = 6\,\overrightarrow{AO}\,,$$

$$\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AD}$$

(٥) النقط H, G, F, E هي منتصفات الأضلاع DA, CD, BC, AB على الترتيب للشكل الرباعي ABCD أثبت أن :

$$\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AC}$$

(٦) أوجد زوايا ميل المتجه $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ مع محاور الإحداثيات.

(٧) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى

$$\overrightarrow{F_1} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}\,, \quad \overrightarrow{F_2} = -5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}\,,$$
$$\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}\,, \quad \overrightarrow{F_4} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}\,.$$

(٨) أثبت أن المتجهات الثلاثة الآتية يمكن أن تكون أضلاع مثلث

$$\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}\,, \quad \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}\,,$$
$$\overrightarrow{c} = 4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}\,.$$

(٩) إذا كان $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$ ، $\overrightarrow{b} = -2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$ ، $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ أوجد : $-2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ ، $\left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right|$

(١٠) إذا كانت G هي نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة للمثلث ABC فأثبت أن $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}$.

(١١) المتجهات $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ ثلاثة متجهات مستوية وبحيث كان $\overrightarrow{a} \equiv (10, 30^{\circ})$ ، $\overrightarrow{b} \equiv (30, 30^{\circ})$ ، $\overrightarrow{c} \equiv (10, 330^{\circ})$ فأوجد

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{c}\,, \ \overrightarrow{a} - \frac{1}{5}\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c}\,, \ 3\overrightarrow{c} - \frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)$$

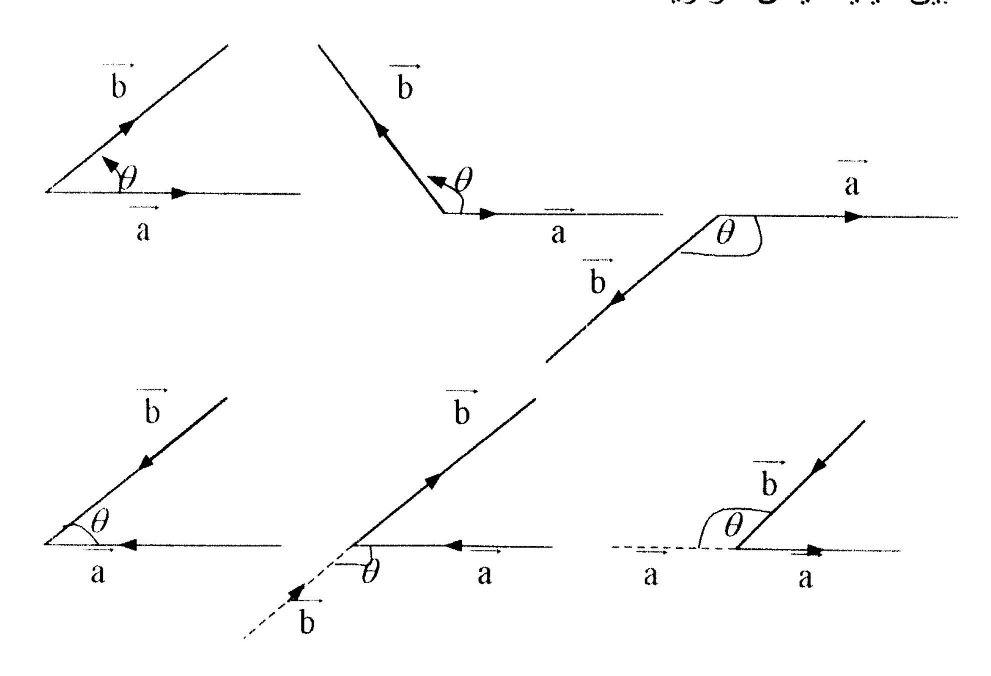
(١٢) ABCD شكل رباعي فيه Q, P منتصفا الضلعين BD, AC على الترتيب فاثبت أن :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{PQ}$$

ضرب المتجهات :

قبل البدء في تعريف حواصل ضرب بين أي متجهين $\overline{b}$, $\overline{a}$ يحصران بينهما زاوية θ سوف نعرف كيفية قياس θ .

الزاوية بين أي متجهين θ تقاس إذا كان وضع المتجهين داخلين إلى نقطة تقاطعهما أو خارجين من نقطة تقاطعهما ودائما $\theta \leq \pi$ والأشكال المبينة تبين كيفية قياس الزاوية.



أولا : حاصل الضرب القياسي بين أي متجهين $\overline{b}$, $\overline{a}$

Scalar (dot, inner) product :

نعرف حاصل الضرب القياسي بين أي متجهين $\overline{b}$, $\overline{a}$ يحصران بينهما زاوية θ بأنه الكمية القياسية الناتجة عن حاصل ضرب المتجه الأول في قيمة المتجه الثاني في جيب تمام الزاوية بينهما ونرمز له بالرمز

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ فيكون :

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a\,b\cos\theta \qquad (1)$$

خواص حاصل الضرب القياسي :

(أ) حاصل الضرب القياسي يحقق قانون التبديل بمعنى أن :

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$$

كما يتحقق أيضا قانون التوزيع (المشاركة) بالنسبة للجمع أي

$$\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$$

وإذا كانت m أي كمية قياسية فإن :

$$m(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})=m\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\,(m\,\overrightarrow{b})=(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})\,m$$

(ب) إن مربع أي متجه يساوي حاصل ضربه القياسي في نفسه لأن

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=a\,.\,a\cos 0^{o}=a^{2}$$

إذ أن الزاوية بين المتجه والمتجه الذي ينطبق عليه هي 0^{o} .

(جـ) إن الشرط الضروري والكافي لكي يكون أي متجهين غير صفريين متعامدان هو أن يتلاشى حاصل ضربهما القياسي.

في هذه الحالة في حاصل الضرب القياسي $\theta=\frac{\pi}{2}$ فيكون $\cos\theta=0$

ويصبح $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$

أما إذا كان $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a\,b$ فإن المتجهان سيكونان متوازيان.

(ء) بتطبيق تعريف حاصل الضرب القياسي على متجهات الوحدة الأساسية $\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}$ ينتج أن :

$$\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{k}=1$$

$$\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j}=\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{k}=\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{i}=0$$

فإذا عبرنا عن كل من المتجهين $\vec{a}\ .\ \vec{b}$ بدلالة مركباتهم

$$\vec{a} = a_x\ \vec{i} + a_y\ \vec{j} + a_z\ \vec{k}\ , \qquad \vec{b} = b_x\ \vec{i} + b_y\ \vec{j} + b_z\ \vec{k}$$

على ذلك سوف نحصل على

$$\vec{a}\ .\ \vec{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z$$

وأن مربع طول أي متجه سيكون

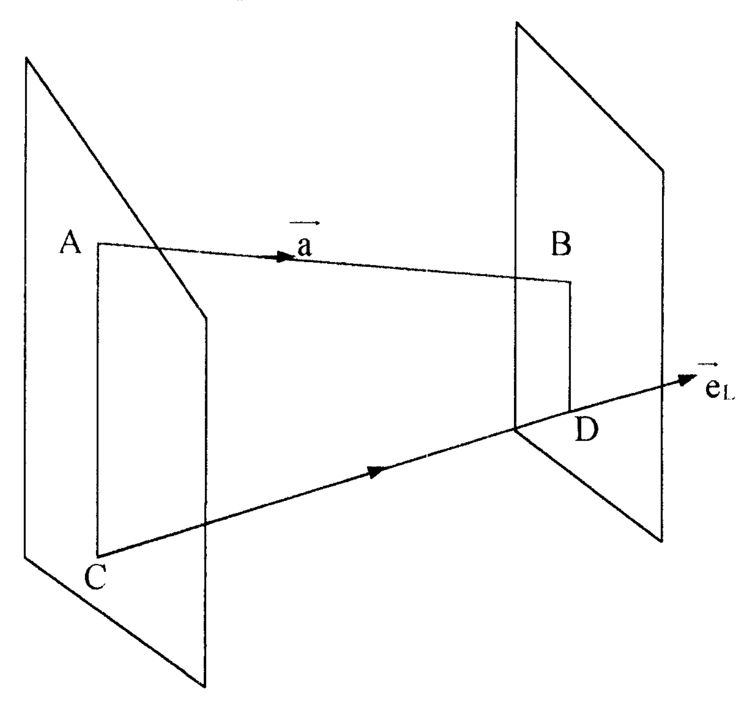
$$\vec{a}\ .\ \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$$

وأن مركبات أي متجه $\vec{a}$ في اتجاه محاور الإحداثيات هي

$$\vec{a}\ .\ \vec{i} = a_x\ \ ,\ \ \vec{a}\ .\ \vec{j} = a_y\ \ ,\ \ \vec{a}\ .\ \vec{k} = a_z$$

وكذلك مركبة متجه ما $\vec{a}$ في اتجاه خط ما L معلوم متجه الوحدة في اتجاهه (أي معلوم اتجاه الخط نفسه) وليكن $\vec{e}_L$.

نفرض A, B هما نقطتا بداية ونهاية المتجه $\vec{a}$ على الترتيب. نرسم من A, B مستويين عموديين على L يقطعانه في C, D على الترتيب



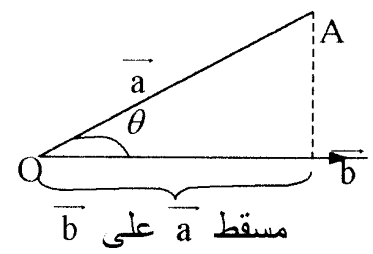
المتجه $\overrightarrow{CD}$ سيكون هو مركبة $\overrightarrow{a}$ في اتجاه L . ويكون هذا المسقط هو

$$\overrightarrow{e_L} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e_L} = \left| \overrightarrow{CD} \right|$$

(هـ) المعنى الهندسي لحاصل الضرب القياسي بين متجهين.

نعتبر المتجهان $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ المتقاطعان عند O والزاوية بينهما θ

إن OA هو مسقط $\overrightarrow{a}$ على $\overrightarrow{b}$ ويكون طول هذا المسقط



$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e_b} = a\cos\theta$$

أي أن مسقط متجه على آخر هو حاصل الضرب القياسي للمتجه الأول في متجه الوحدة في اتجاه المتجه الثاني. ويعتبر هذا المعنى الهندسي لحاصل الضرب القياسي.

مثال (١) : أوجد متجه الوحدة في اتجاه المتجه الذي يبدأ من النقطة (2,3,0) ويمر بالنقطة (-2,4, 6). ثم أوجد مسقط المتجه $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ على اتجاه المتجه الأول.

الحل : إن المتجه الواصل من النقطة (2, 3, 0) إلى النقطة (-2, 4, 6) هو متجه موضع الثانية بالنسبة للأولى ويساوي

$$(-2,-2)\overrightarrow{i} + (4-3)\overrightarrow{j} + (6-0)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{p} \quad \text{say}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{p} = -4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}$$

يكون متجه الوحدة في اتجاه هذا المتجه هو

$$\overrightarrow{e} = \frac{\overrightarrow{p}}{\left|\overrightarrow{p}\right|} = \frac{-4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}}{\sqrt{(-4)^2 + (1)^2 + (6)^2}}$$

$$\vec{e} = -0.549\,\vec{i} + 0.137\,\vec{j} + 0.823\,\vec{k}$$

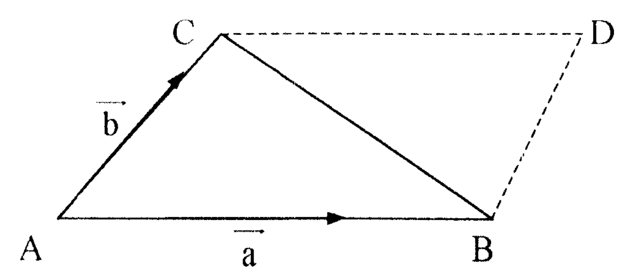
أما مسقط المتجه $\vec{a}$ على اتجاه المتجه هذا فيكون هو

$$\vec{a}\,.\,\vec{e} = 2\,(-0.549) + 3\,(0.137) - (0.823)$$
$$= -1.41\,.$$

ويكون طول هذا المسقط هو $|-1.41| = 1.41$

مثال (٢) : أثبت بطريقة المتجهات قانون جيب التمام لأي مثلث.

الحل : اعتبر مثلث ABC فيه $\vec{a} = \overrightarrow{AB}\,,\ \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ والزاوية بينهما θ



اعتبر اتجاه لمتجه ما في الضلع BC وليكن هو المتجه $\overrightarrow{BC}$ فمن الشكل

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

بتربيع الطرفين مع الأخذ في الاعتبار الخاصية (ب)

$$\therefore\ (BC)^2 = \overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BC} = (\vec{b} - \vec{a}\,)^2 = (\vec{b} - \vec{a}\,)\,.\,(\vec{b} - \vec{a}\,)$$
$$= \vec{b}\,.\,\vec{b} - \vec{b}\,.\,\vec{a} - \vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{a}\,.\,\vec{a}$$
$$= \vec{b}\,.\,\vec{b} + \vec{a}\,.\,\vec{a} - 2\,\vec{a}\,.\,\vec{b}$$
$$= b^2 + a^2 - 2\,a\,b\cos\theta$$
$$= (AC)^2 + (AB)^2 - 2\,(AC)\,(AB)\cos\theta$$

وهو قانون جيب التمام لأي مثلث.

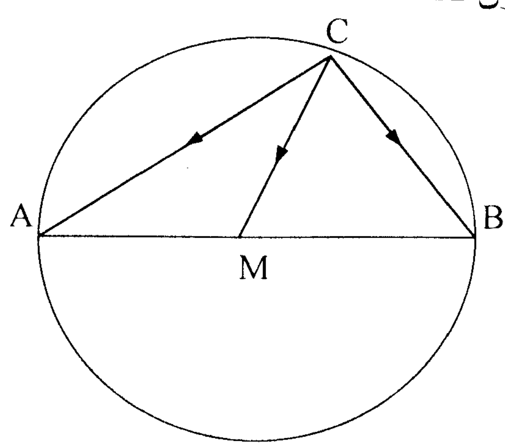
نلاحظ أنه لو أكملنا متوازي الأضلاع سيكون المتجه $\overrightarrow{AD}$ يساوي

$$\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$$

مثال (٣) : أثبت بطريقة المتجهات أن الزاوية المحصورة في نصف دائرة تكون قائمة.

الحل : اعتبر دائرة نصف قطرها λ ومركزها M وقطرها AB ونرسم زاوية محصورة في نصف الدائرة وعند نقطة على المحيط C.

المطلوب إثبات أن $A\hat{C}B$ هي زاوية قائمة وهذا يناظر إثبات أن الزاوية بين الضلعين CA, CB تكون قائمة.



فنعتبر المتجهان $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ في المثلث ACB فيكون (M منتصف الضلع AB فإن)

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\,\overrightarrow{CM} \qquad (1)$$

أيضاً في المثلث ABC فيه

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = -\,\overrightarrow{AB} \qquad (2)$$

من (1)، (2) بالجمع يكون

$$2\,\overrightarrow{CA} = 2\,\overrightarrow{CM} = -\,\overrightarrow{AB} \qquad (3)$$

بالطرح يكون

$$2\,\overrightarrow{CB} = 2\,\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AB} \qquad (4)$$

بضرب (3)، (4) قياسيا نحصل على

$$4\,\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB} = (2\,\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{AB}).(2\,\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AB})$$
$$= 4\,(CM)^2 + 2\,\overrightarrow{CM}\,.\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CM} - (AB)^2$$
$$= 4\,\lambda^2 - (2\,\lambda)^2 = 0$$

من هذه العلاقة ينتج أن $\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB} = 0$

معنى هذا أن المتجهان متعامدان. أي أن الزاوية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة.

مثال (٤) : أثبت أن المتجهين الآتيين متوازيين :

$$\overrightarrow{a} = 6\,\overrightarrow{i} + 8\,\overrightarrow{j} + 10\,\overrightarrow{k} \quad , \quad \overrightarrow{b} = 3\,\overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j} + 5\,\overrightarrow{k}$$

ثم عبر عن $\overrightarrow{a}$ بدلالة $\overrightarrow{b}$.

الحل :

$$\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = 6\times 3 + 8\times 4 + 10\times 5 = 100 \qquad (1)$$

ولكن

$$\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{6^2 + 8^2 + 10^2} = \sqrt{200} = a$$
$$\left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 25} = \sqrt{50} = b$$
$$\therefore\ a\,b = \sqrt{200}\,\sqrt{50} = \sqrt{10000} = 100 \qquad (2)$$

ومن تعريف حاصل الضرب القياسي

$$\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = a\,b\cos\theta$$

بالتعويض من (1)، (2)

$$100 = 100\cos\theta$$

$$\therefore \ \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0^{\circ}$$

∴ المتجهان متوازيان (أو منطبقان). كما نلاحظ أن

$$\vec{a} = 2\,\vec{b}$$

مثال (٥) : أوجد الزاوية بين المتجهين $\vec{a} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - \vec{k}$ ،

$$\vec{b} = 6\,\vec{i} - 3\,\vec{j}\ 2\,\vec{k}$$

الحل :

لدينا

$$a = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$
$$b = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 9$$

أيضاً

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = (2)(6) + (2)(-3) + (-1)(2) = 4$$

ومن تعريف حاصل الضرب القياسي

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = a\,b\cos\theta$$
$$4 = (3)(7)\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{4}{21} \quad \therefore \ \theta = 79^{\circ}$$

من التطبيقات الهامة على حاصل الضرب القياسي بين متجهين هو شغل قوة $\vec{F}$ بين موضعين فنعرف :

الشغل المبذول W_{12} بواسطة قوة ثابتة $\vec{F}$ لتحريك جسم بين موضعين الإزاحة بينهما هي $\vec{r}$ هو حاصل الضرب القياسي بين القوة والإزاحة أي

$$W_{1\to 2} = \vec{F}\,.\,\vec{r} = F\,r\cos\theta$$

فإذا كانت $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ ، $\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$

يكون الشغل المبذول هو $W_{1\to 2} = F_x\,x + F_y\,y + F_z\,z$

أي شغل القوة يساوي المجموع الجبري لشغل مركباتها.

ثانيا : حاصل الضرب الاتجاهي بين متجهين

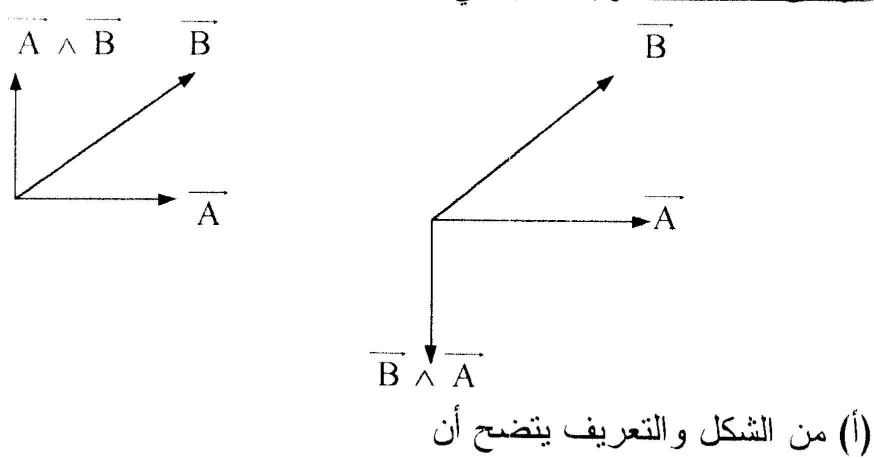
Vector (or Cross) Product

نعرف حاصل الضرب الاتجاهي بين متجهين $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ يحصران بينهما زاوية θ بأنه متجه ثالث $\overrightarrow{c}$ مقداره هو $a\,b \sin\theta$ واتجاهه عمودي على المستوى المكون من المتجهين $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ ويعمل معهما محاور يمينية (بمعنى أن الانتقال من $\overrightarrow{A}$ إلى $\overrightarrow{B}$ حسب ترتيبهم في حاصل الضرب يجعل البريمة تتحرك في اتجاه $\overrightarrow{C}$) ونرمز للمتجه $\overrightarrow{C}$ بالرمز $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$ أي أن

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{C} = A\,B \sin\theta\, \overrightarrow{e}$$

حيث $\overrightarrow{e}$ متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{C}$ والعمودي على كل من $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ في اتجاه الحركة الانتقالية للبريمة اليمينية عندما تدور من $\overrightarrow{A}$ إلى $\overrightarrow{B}$.

خواص حاصل الضرب الاتجاهي :



(أ) من الشكل والتعريف يتضح أن

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = - \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{A}$$

أي لا يتحقق بالنسبة لحاصل الضرب الاتجاهي قانون التبديل.

(ب) القواعد الآتية صحيحة بالنسبة للضرب الاتجاهي

(1) $\overrightarrow{A} \wedge (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{C}$

(2) $(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) \wedge (\overrightarrow{C} + \overrightarrow{D}) = \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{C} + \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{D} + \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C} + \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{D}$

$= \overrightarrow{A} \wedge (\overrightarrow{C} + \overrightarrow{D}) + \overrightarrow{B} \wedge (\overrightarrow{C} + \overrightarrow{D})$

(3) $m(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}) = m\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} \wedge m\overrightarrow{B}$

حيث m أي عدد قياسي.

(جـ) إذا كان $\overrightarrow{A}$ ، $\overrightarrow{B}$ متجهان متوازيان (أو في اتجاه واحد) فإن :

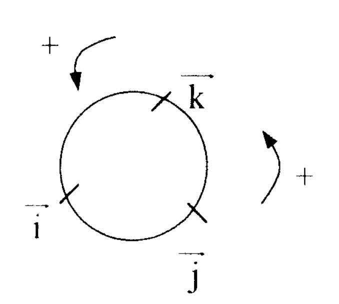
$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{O}$

ويكون هذا هو شرط توازي متجهين.

(٢) بالنسبة لمتجهات الوحدة الأساسية بتطبيق التعريف نجد أن

$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{O}$

$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}\ ,\ \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$



ويمكن حفظ هذه العلاقات الأخيرة من رسم دائرة كما بالشكل ويكون الاتجاه الموجب من $\overrightarrow{i}$ إلى $\overrightarrow{j}$ إلى $\overrightarrow{k}$ وحاصل ضرب كل متجهين يكون مساوياً الثالث وفي نفس الاتجاه الدوري. والعكس إذا كان عكس الاتجاه كان الناتج الثالث بإشارة سالبة أي

$\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k}\ ,\ \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}$

(هـ) إذا عبرنا عن كل من $\overrightarrow{A}$ ، $\overrightarrow{B}$ بدلالة مركباتهم

$\overrightarrow{A} = A_x\overrightarrow{i} + A_y\overrightarrow{j} + A_z\overrightarrow{k}$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

فإنه يمكن وضع حاصل الضرب الاتجاهي على الصورة :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ومن خواص المحددات نجد أنه بتبديل الصفين الثاني والثالث فإن قيمة المحدد يتغير إشارتها ويصبح

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -(\vec{B} \wedge \vec{A})$$

أيضا إذا كان المتجهان $\vec{A}$, $\vec{B}$ متوازيان فإن قيمة المحدد = صفر ولابد أن يتساوى بذلك صفين أي لابد أن يعبر عن أحد المتجهين بدلالة الآخر على الصورة

$$\vec{A} = m\,\vec{B} \quad \text{or} \quad \vec{B} = \lambda\,\vec{A}$$

حيث m أو λ أعداد قياسية (طبقا يكون $\lambda = \frac{1}{m}$).

مثال (٦) : أثبت أن متطابقة لاجرانج الآتية

$$(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + (\vec{A} \wedge \vec{B})^2 = A^2 B^2$$

الحل :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B\cos\theta$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = A\,B\sin\theta\ \vec{e}$$

بالتعويض في الطرف الأيسر

$$(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + (\vec{A} \wedge \vec{B})^2 = A^2B^2\cos^2\theta + A^2B^2\sin^2\theta\ \vec{e} \cdot \vec{e}$$

$$= A^2B^2\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right] = A^2B^2$$

مثال (٧) : أثبت أن المتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ متوازيين ثم عبر عن أحدهما بدلالة الآخر.

$$\overrightarrow{A} = 2\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \qquad , \quad \overrightarrow{B} = 6\,\overrightarrow{i} - 9\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k}$$

الحل :

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & -9 & 3 \end{vmatrix} = 0\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k} = \overrightarrow{O}$$

وبالتالي يكون $\overrightarrow{A}$ موازيا $\overrightarrow{B}$. ويكون من شكل المتجهين أن

$$\overrightarrow{B} = 3\,\overrightarrow{A}$$

ويمكن على وجه العموم إذا أمكن وضع (أو التعبير عن) أي متجه بدلالة الآخر على الصورة

$$\overrightarrow{B} = m\,\overrightarrow{A}$$

حيث m مقدار قياسي فيكون المتجهان متوازيان إذا وجدنا m. وفي هذه الحالة نضع

$$6\,\overrightarrow{i} - 9\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k} = m(2\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$$

بذلك لابد أن يكون (بمساواة معاملات كل من $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$) في الطرفين

$$\therefore \quad 6 = 2\,m \;, -9 = -3\,m \;, 3 = m$$

من ذلك نجد أن $m = 3$ تحقق كل العلاقات الثلاثة السابقة فيكون

$$\overrightarrow{A} = 3\,\overrightarrow{A}$$

تطبيقات على حاصل الضرب الاتجاهي :

لحاصل الضرب الاتجاهي تطبيقات عديدة نذكر منها

(١) تعيين المتجه العمودي على متجهين $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$

نعلم أن المتجه $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$ هو متجه عمودي على مستوى المتجهين $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ ويمكن إيجاد متجه وحدة في إتجاه هذا العمودي بأن نوجد

$$\vec{e} = \frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{A\,B\sin\theta} = \frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right|}$$

مثال (٨) : أوجد متجه وحدة عمودي على كل من المتجهين

$$\vec{A} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} - 3\,\vec{k} \quad , \quad \vec{B} = 4\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - \vec{k}$$

الحل :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\,\vec{i} - 10\,\vec{j} + 30\,\vec{k}$$

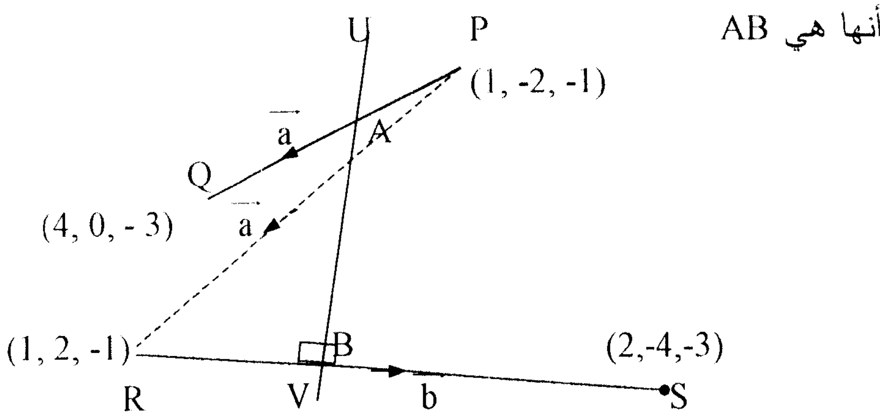
ويكون بذلك وحدة المتجه العمودي هو

$$\vec{e} = \frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right|} = \frac{15\,\vec{i} - 10\,\vec{j} + 30\,\vec{k}}{\sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2}}$$

$$= \frac{3}{7}\vec{i} - \frac{2}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$$

مثال (٩) : أوجد أقل مسافة بين المستقيمين RS, PQ إذا علم أن إحداثيـــات هذه النقط هي $P \equiv (1,-2,-1)\,,\, Q \equiv (4,0,-3)\,,\, R \equiv (1,2,-1),\, S \equiv (2,-4,-5)$

الحل : إن أقصر مسافة بين المستقيمين هي العمودية على كل منهم. نفرض أنها هي AB



نفرض المتجهات هي

$$\overline{a} = \overline{PQ} = (4-1)\overline{i} + (0+2)\overline{j} + (-3+1)\overline{k}$$
$$= 3\overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}$$
$$\overline{b} = \overline{RS} = (2-1)\overline{i} + (-4-2)\overline{j} + (-5+1)\overline{k}$$
$$= \overline{i} - 6\overline{j} - 4\overline{k}$$

نوجد حاصل الضرب الاتجاهي بين المتجهين فيكــون متجــه فــي اتجــاه عمودي على كل من $\overline{A}$, $\overline{B}$ وليكن هو $\overline{C}$ أو UV

$$\overline{C} = UV = \overline{a} \wedge \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -20\overline{i} + 10\overline{j} - 20\overline{k}$$

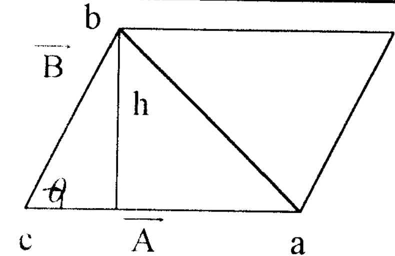
وطبعاً هذا المتجه ليس هو نفسه المتجه $\overline{AB}$ (أقصر مسافة) بذلــك نوجــد المتجه $\overline{PR}$ فيكون أقصر مسافة هو مسقط هذا المتجه علــى المتجــه UV (نسقط عمود من P يقابله في A وعمود من R يقابله في B) وبذلك نوجد

$$\overline{PR} = (1-1)\overline{i} + (2+2)\overline{j} + (-1+1)\overline{k} = 4\overline{j} = \overline{d} \quad \text{say}$$

ومسقط المتجه $\overline{d}$ على المتجه $\overline{C}$ يعطي أقل بعد ويكون هو

$$AB = \frac{\overline{d}\,.\,\overline{C}}{C} = \overline{d}\,.\,\overline{e}_c = \frac{(0)(-20)+(4)(10)+(0)(-20)}{\sqrt{(-20)^2+(10)^2+(-20)^2}}$$

(٢) إيجاد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\overline{A}$, $\overline{B}$ ضلعان متجاوران :



لمتوازي الأضــلاع فــي الشــكل المبيــن $\overline{A}$, $\overline{B}$ ضلعان متجاوران يكون مساحته هي

القاعدة × الارتفاع = $a \times h$ = المساحة

$$\text{المساحة} = \overline{A} \times (B \sin\theta) = \left| \overline{A} \wedge \overline{B} \right|$$

بذلك فإن مساحة المثلث Cab الذي فيه $\overline{A}$, $\overline{B}$ ضلعان متجاوران تكون هي

$$\Delta = \frac{1}{2} \left| \overline{A} \wedge \overline{B} \right|$$

ويعتبر ذلك المعنى الهندسي لحاصل الضرب الاتجاهي وهو أن نصف مقدار حاصل الضرب الاتجاهي = مساحة المثلث، أو مقدار حاصل الضرب الإتجاهي بين أي متجهين = ضعف مساحة المثلث الذي فيه الضلعان المتجاوران هما المتجهان.

مثال (١٠) : أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه هي النقط A, B, C حيث

$$A \equiv (1,3,2), B \equiv (2,-1,1), C \equiv (-1,2,3)$$

الحل : نوجد متجهي أي ضلعين في المثلث وليكونا هما :

B (2, -1, 1)
$\overline{a}$
C(-1,2,3)
A(1, 3,2)
$\overline{b}$

$$\overline{AB} = \overline{a} = (2-1)\,\overline{i} + (-1-3)\,\overline{j} + (1-2)\,\overline{k} = \overline{i} - 4\,\overline{j} - \overline{k}$$

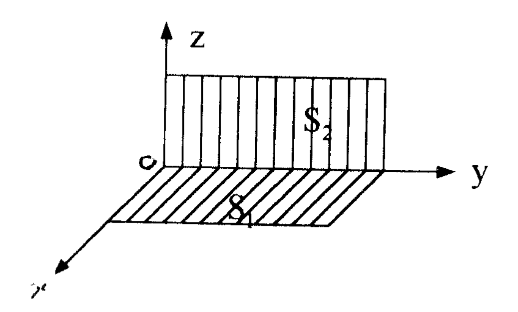
$$\overline{AC} = \overline{b} = (-1-1)\,\overline{i} + (2-3)\,\overline{j} + (3-2)\,\overline{k} = -2\,\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$$

بذلك يكون :

$$\Delta = \frac{1}{2} \left| \overline{A} \wedge \overline{B} \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left| -5\,\overline{i} + \overline{j} - 9\,\overline{k} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(-5)^2 + (1)^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{107}$$

(٣) متجه المساحة :



إذا اعتبرنا مستطيلين (مثلاً) متساويين في المساحة $S_1 = S_2$ أحدهما يقع في المستوى oxy والآخر يقع في المستوى oyz. كما بالشكل

من حيث المساحة نجد أن المستطيلين متساويين ولكن من حيث الموضع في الفراغ فإن المستطيلين مختلفين. هذا الاختلاف قد يؤثر عند حساب بعض الكميات التي تعتمد على وضع المساحة في الفراغ (مثال ذلك شدة الإضاءة الناتجة عن سقوط الضوء على المساحتين) لذلك عند التعبير عن المساحة يجب أن يكون هناك وسيلة للتعبير تتضمن وضع المساحة كما تتضمن مقدارها.

ولما كان وضع أي مساحة في الفراغ يُميَّز باتجاهاً خاصاً (وكذلك بالمساحات الموازية لها) وهو اتجاه العمودي على هذه المساحة في الفراغ، بذلك يعبر دائماً عن المساحة بمتجه يسمى متجه المساحة يكون مقداره ممثلاً للمقدار العددي للمساحة ويكون اتجاهه هو الاتجاه العمودي على المساحة.

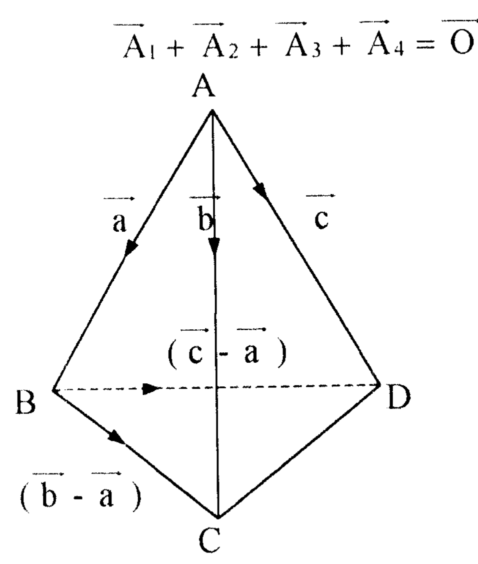
في الشكل السابق يعبر عن المساحة S_1 بالمتجه $\overline{S_1} = S_1 \overline{k}$ كذلك يعبر عن المساحة S_2 بالمتجه $\overline{S_2} = S_2 \overline{i}$.

فإذا كانت المساحة على هيئة متوازي أضلاع ذات ضلعين متجاورين هما المتجهين $\overline{a}\,,\,\overline{b}$ فإن $\overline{S} = \overline{a} \wedge \overline{b}$

حيث يمكن الاتفاق أن يكون إتجاه ما موجب (وغالباً ما يؤخذ على حسب اتجاه انتقال بريمة يمينية تدور في مستوى المساحة).

مثال (١١) : إذا مثلنا الثلاثة أضلاع المتلاقية في نقطة الهرم ثلاثي بالمتجهات $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ الخارجة من نفس النقطة. وكانت مساحة أوجه الهرم ممثلة بالمتجهات الأربع $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_4}$ حيث كل منهم يشير للخارج (هنا يؤخذ الاتجاهات الخارجية العمودية على المساحة هي الاتجاهات الموجبة للمساحة). فأثبت أن

$$\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3} + \overline{A_4} = \overline{O}$$



الحل : الرسم يبين المتجهات $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ كما يمكن إيجاد متجهات أضلاع القاعدة بدلالة هذه المتجهات.

بفرض أن الهرم ABCD فيمكن إيجاد مساحات أوجهه وهي عبارة عن مثلثات ولكن يجب أن نأخذ في الاعتبار أن متجهات هذه المساحات وهي $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_4}$ كلها موجبة إلى الخارج بذلك يكون :

$$\overline{A_1} = \frac{1}{2}(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = \frac{1}{2}(\overline{a} \wedge \overline{b}) \qquad (1)$$

وهذه مساحة المثلث ABC وستكون موجبة للخارج

$$\overline{A_2} = \frac{1}{2}(\overline{AC} \wedge \overline{AD}) = \frac{1}{2}(\overline{b} \wedge \overline{c}) \qquad (2)$$

وهي مساحة المثلث ACD وستكون أيضاً موجبة للخارج

$$\overrightarrow{A_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) \qquad (3)$$

وهي مساحة المثلث ABD وأيضاً موجبة للخارج.

أما مساحة المثلث BCD وهو قاعدة الهرم فإنها تساوي

$$\overrightarrow{A_4} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) \wedge (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \quad (4)$$

وهي من الواضح أنها أيضاً للخارج.

بجمع (1)، (2)، (3)، (4) نحصل على أن

$$\overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2} + \overrightarrow{A_3} + \overrightarrow{A_4} =$$

$$\frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) + (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) \wedge (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})\right]$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{4} \overrightarrow{A_n} = \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{b}\right.$$

$$\left. - \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a} - \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{a}\right]$$

ونعلم أن $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{O}$ كما نعلم أن $-\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}$ وبذلك نحصل على العلاقة الآتية :

$$\sum_{n=1}^{4} \overrightarrow{A_n} = \overrightarrow{O}$$

ملاحظة هامة: اعتبر سطح مقفل (كرة مثلاً) وكان $\overrightarrow{da}$ هو عنصر المساحة المتجه من سطح الكرة (ونأخذ الاتجاه الموجب للخارج وعمودي على الكرة مثلا). فيكون من الواضح أن $\sum \overrightarrow{da} = \overrightarrow{O}$

وذلك بالجمع على جميع العناصر المساحية للجسم لأن كل متجه سوف يقابله في الناحية الأخرى (طالما السطح مقفل) متجه آخر مساو له في

المقدار ومضاد له في الاتجاه فيكون مجموعهم = صفراً ونحصل بذلك على العلاقة السابقة.

ولكن يجب ملاحظة أن

$$\sum da = \text{مساحة الكرة كلها} = 4\pi \ell^2$$

حيث ℓ نصف قطر الكرة وهذه طبعاً لا تساوي ≠ صفر.

(٤) متجه عزم قوة حول نقطة :

إذا أثرت قوة $\overline{F}$ على جسم ما فإننا نعلم أن مقدار عزم القوة حول أي نقطة هو المقدار الذي يمكن به للقوة أن تدير الجسم حول هذه النقطة. ويقدر هذا العزم بحاصل ضرب مقدار القوة في البعد العمودي من النقطة على اتجاه خط عمل القوة ويسمى هذا البعد بذراع العزم. ونرمز للعزم بالرمز M والبعد العمودي بالرمز h فيكون

$$M = F h .$$

سوف تمثل أي كمية دورانيه بمتجه عمودي على مستوى الدوران ويكون في اتجاه حركة تقدم البريمة اليمينية إذا دارت في اتجاه دوران هذه الكمية الدورانية. بذلك نجد أنه من تعريف العزم لقوة حول نقطة فإنه سيكون كمية دورانية فعلى هذا يمكن تمثيله بمتجه عمودي على مستوى الدوران وفي اتجاه انتقال البريمة اليمينية عند دورانها في نفس اتجاه الدوران للقوة حول النقطة.

فإذا أخذنا نقطة ما P على اتجاه خط عمل القوة $\overline{F}$ وحيث $\overline{r}$ متجه موضع P بالنسبة للنقطة O المطلوب إيجاد عزم القوة $\overline{F}$ حولها.

بذلك نجد أن هذا العزم له نفس اتجاه المتجه $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$ وله نفس مقدار هـذا المتجه

$$\left|\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}\right| = \left|r\,F\sin\theta\,\overrightarrow{e}\right| = F\,h$$

$\overrightarrow{e}$ متجه الوحدة العمــودي علــى المستوى الذي يحوي $\overrightarrow{F}$ ، $\overrightarrow{r}$ وفي اتجاه البريمة اليمينية عندما تدور من $\overrightarrow{r}$ إلى $\overrightarrow{F}$.

وبذلك نجد أن هذا المتجه هو نفسه متجه عزم القوة $\overrightarrow{F}$ حول O

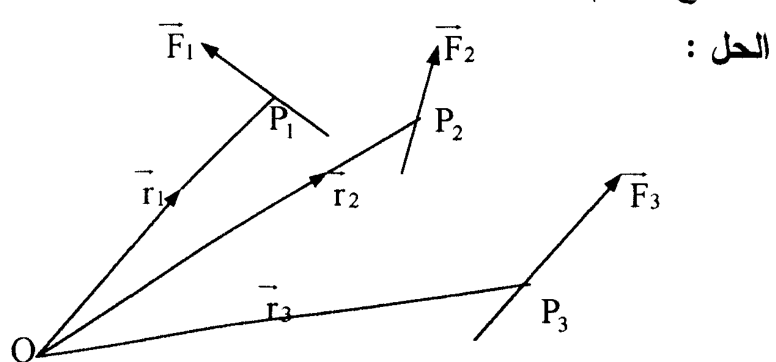
$$\therefore\ \overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$$

على ذلك لإيجاد متجه عزم قوة حول نقطة نأخذ نقطة ما على اتجــاه خــط عمل القوة ونوجد متجه موضعها بالنسبة إلى النقطة المطلوب إيجاد العــزم حولها فيكون العزم هو حاصل الضرب الإتجاهي بين $\overrightarrow{r}$ ، $\overrightarrow{F}$.

مثال (١٢) : تؤثر القوى $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ في النقط P_1, P_2, P_3 على الــترتيب حيث $\overrightarrow{F_1} = 5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ ، $\overrightarrow{F_2} = 2\overrightarrow{i} + 10\overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k}$ ، $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j}$

أما النقط الثلاثــة فــهي $P_1 \equiv (1,2,3), P_2 \equiv (2,3,4), P_3 \equiv (1,1,)$ احســب مجموع عزوم القوى حول نقطة الأصل.

الحل :



من هندسة الشكل نجد أن

$$\overrightarrow{M_o} = \sum \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$$

أي أن مجموع عزوم القوى حول O هو $\overrightarrow{M_o}$ ويكون

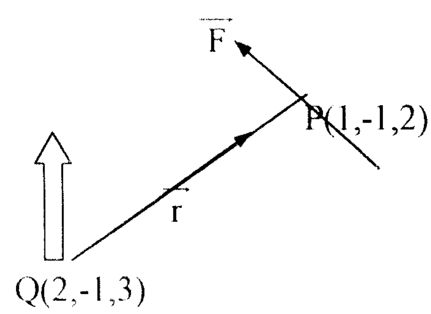
$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{r_2} \wedge \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{r_3} \wedge \overrightarrow{F_3}$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 10 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -12 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -5\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} - 9\overrightarrow{k}$$

مثال (١٣) : احسب عزم القوة $\overrightarrow{F} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$ والتي تمر بالنقطة $P \equiv (1,-1,2)$ حول النقطة $Q(2,-1,3)$.

الحل : نحسب $\overrightarrow{r}$ من هندسة الشكل



$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_{PQ}} = \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_Q}$$

$$=(1-2)\overrightarrow{i} + (-1+1)\overrightarrow{j} + (2-3)\overrightarrow{k}$$

$$= -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$$

يكون :

$$M_Q = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$$

ثالثا : حاصل الضرب القياسي الثلاثي : Triple Scalar Product

إذا أعطينا ثلاثة متجهات $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ فيمكن الحصول على حواصل ضرب متعددة فمثلا $\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B}.\overrightarrow{C}) = (\overrightarrow{B}.\overrightarrow{C})\overrightarrow{A}$ يعطي متجه له اتجاه المتجه $\overrightarrow{A}$ ولكن طوله = طول $\overrightarrow{A}$ مضروبا في العدد القياسي

$(\vec{B}.\vec{C})$. ولكن يجب أن نلاحظ أن حاصل الضرب $\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$ لا يساوي ≠ حاصل الضرب $\vec{A}(\vec{B}.\vec{C})$ إذ أن الطرف الأول يعطي متجه له اتجاه $\vec{C}$ ولكن الثاني متجه له اتجاه $\vec{A}$ بمعنى أن قانون الدمج لا ينطبق على هذا النوع من ضرب المتجهات.

نلاحظ أيضاً أن عملية الضرب المتعددة للمتجهات من الممكن أن لا يكون لها معنى مثال ذلك لو ضربنا $\vec{A}.(\vec{B}.\vec{C})$ أو $\vec{A}\wedge(\vec{B}.\vec{C})$ لأن $\vec{B}.\vec{C}$ كمية قياسية ولا يوجد معنى ضرب اتجاهي أو قياسي بين متجه وكمية قياسية.

أيضا يوجد عمليات ضرب متعددة لها معنى مثال ذلك $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})$ أو $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$ ومثل هذه العمليات سيطلق على كل منها اسم معين.

<u>حاصل الضرب القياسي الثلاثي :</u>

إن الكمية القياسية الناتجة من حاصل الضرب المتكرر للمتجهات الثلاثة $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ والتي على الصورة $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})$ تسمى بحاصل الضرب القياسي الثلاثي. وإذا عبرنا عن المتجهات الثلاثة بدلالة مركباتهم يمكن إثبات أن هذا المقدار الثلاثي القياسي هو ناتج المحدد

$$\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

إذا استخدمنا خواص المحددات يمكن الحصول على الخواص التالية لحاصل الضرب القياسي الثلاثي :

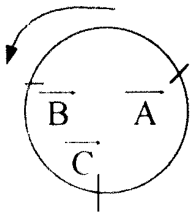
(أ) إذا بدلنا صف بأخر في أي محدد نجد أن إشارة المحدد سوف تتغير. فلو

بدلنا صفين مرة أخرى فإن الإشارة ترجع إلى ما كانت عليـــــه وبذلــك يمكن إجراء ذلك على المحدد السابق فنجد أن :

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

بذلك يمكن الحصول على الخاصية التالية :

$$\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B})$$



وواضح أن التبديل بين المتجهات الثلاثة هـــو ترتيـــب دوري في حاصل الضرب القياسي الثلاثي ويمكن تذكر هذه الخاصية بسهولة برسم دائرة كما بالشكل الجـــانبي ثم نبدأ في نفس الاتجاه الدوري كل مرة بمتجه مختلـف مع المحافظة على وضع العلامتين .، ∧

(ب) إذا أخذنا في الخاصية السابقة الجزء الأول والثالث في المتساوية

$$\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

وبما أن الضرب القياسي كمية تبديلية فيمكن وضع الطرف الأيمـــن على الصورة $(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C}$ لتصبح المتساوية هي

$$\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C}$$

وواضح أن ترتيب المتجهات واحد في الطرفين ولكن بدلنا علامتي الضرب القياسي والاتجاهي.

بذلك تبديل علامتي الضرب بين المتجـــهات الثلاثـــة فـــي حـــاصل الضرب القياسي الثلاثي لن يغير من قيمة الضرب القياسي لذلك فقد جـــرى

العرف على كتابة (أو الرمز) حاصل الضرب القياسي الثلاثي على الصورة $[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}]$ ولا يهم وضع علامتي الضرب بشرط أن يكون الناتج لــــه معنى (مثلا لا نكتب $\vec{a} \wedge (\vec{b} . \vec{c})$ مثلا) فيكون

$$[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = \vec{A} . (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) . \vec{C}$$

(جــ) نعلم من خواص المحددات أنه إذا تساوى صفان (أو عمودان) لتلاشت قيمة المحدد وعلى ذلك

$$\vec{A} . (\vec{A} \wedge \vec{C}) = \vec{A} . (\vec{B} \wedge \vec{B}) = \dots = O$$

ومن الطبيعي أيضا إذا توازى متجهان فإن حاصل الضرب القياسي يتلاشى لأنه يمكن التعبير عن أي متجه بدلالة متجه يوازيه مضروبــا فــي كميــة قياسية.

(ء) يمكن إثبات الخاصية التالية إذا أعطينا أي عدد قياسي λ فيكون

$$\lambda \vec{A} . (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{A} . (\lambda \vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{A} . (\vec{B} \wedge \lambda \vec{C})$$
$$= [\vec{A} . (\vec{B} \wedge \vec{C})] \lambda$$

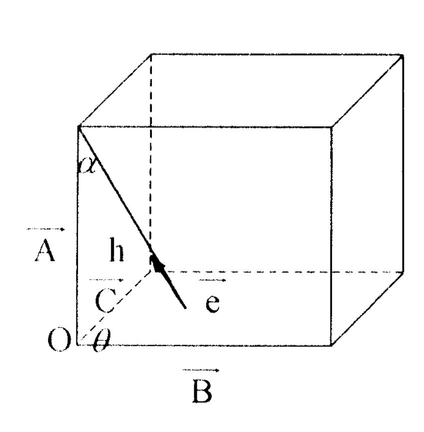
(هــ) إن $(\vec{B} \wedge \vec{C})$ هو متجه عمودي على المستوى الذي يحتوي $\vec{B}, \vec{C}$ فإذا وقع $\vec{A}$ في نفس هذا المستوى فإن $\vec{A} . (\vec{B} \wedge \vec{C})$ ســيكون عبــارة عن حاصل ضرب قياسي لمتجهين متعامدين وبذلك يتلاشى.

وعلى هذا يمكن القول بأن :

الشرط الضروري والكافي لكي يقع ثلاثة متجهات في مستوى واحــد هو تلاشي حاصل الضرب القياسي الثلاثي بينهم.

(و) يستخدم حاصل الضرب القياسي الثلاثي لإيجاد حجم متوازي الســطوح الذي فيه المتجهات الثلاثة هي ثلاثة أضلاع متجاورة. ويمكن إثبات ذلك

كما يلي :



اعتبر متوازي سطوح فيـــه $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ ثلاثة أضلاع متجاورة كما بالشكل فيكون حجمه = مساحة القاعدة × الارتفاع.

حيث θ الزاويـــة بين $\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ ، $\overrightarrow{e}$ متجـــه وحدة في اتجاه عمودي على القاعدة وفي اتجاه البريمة اليمينية عندما تدور من $\overrightarrow{B}$ إلى $\overrightarrow{C}$. (كما بالشكل).

$$\therefore \ \overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C}) = BC\sin\theta \ \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{e} = (BC\sin\theta)(A\cos\alpha)$$
$$= (BC\sin\theta)\,h$$

α الزاوية بين $\overrightarrow{e}$ الذي في اتجاه الارتفاع ومن $\overrightarrow{A}$ وحيث $BC\sin\theta$ هـــو نفسه مساحة القاعدة (متوازي أضلاع). فيكون

حجم متوازي السطوح = الارتفاع × مساحة القاعدة = $\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C})$

يتضح هنا أيضا أنه إذا وقع $\overrightarrow{A}$ في نفس مســـتوى $\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ فإن h = صفـــر ويصبح الحجم متلاشي ويكون حاصل الضرب القياسي الثلاثـــي مســـاويا صفر وهو ما سبق ذكره من شرط وقوع أي ثلاثة متجهات فـــي مســـتوى واحد.

(ز) يستخدم حاصل الضرب القياسي الثلاثي لإيجاد عزم قوة حول محـــور ما ويتم ذلك بحساب عزم القوة $\overrightarrow{F}$ حول أي نقطة O مثلا على المحـــور ثم نعين مسقط هذا العزم كمتجه على المحور كما يلي :

$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{QP}$ ، $\overrightarrow{F}$ نقطة على P ، $\overrightarrow{M_Q} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$

مسقط $\overrightarrow{M_Q}$ على المحور $\overrightarrow{M_Q}\,.\,\overrightarrow{n}$ ، متجه وحدة في اتجاه المحور $= \overrightarrow{n}$

بذلك يكون عزم القـــوة $\overrightarrow{F}$ حـــول المحور الذي له $\overrightarrow{n}$ متجه الوحدة في اتجاهه هو

$$=(\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F})\,.\,\overrightarrow{n}$$

وسوف نورد ذلك في باب الاستاتيكا الفراغية بالتفصيل

رابعا : حاصل الضرب الاتجاهي الثلاثي Triple Vector Product

هناك كمية متجهة يمكن الحصول عليها من حاصل الضرب المعـــدد لثلاثي متجهات ألا وهي $\overrightarrow{A} \wedge (\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C})$ وتسمى بحاصل الضرب الاتجاهي الثلاثي.

نعلم أولا أن الناتج كمية متجهة يمكن معرفة اتجاهه وذلك من وضـــع $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C}$ وهو متجه عمودي على المستوى الذي يحتوي $\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$. أي عمودي على كل من $\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$. وبعد إجراء الضرب $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{D}$ فإن المتجـــــه الجديد سيكون عمودي على كل من $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{D}$ أي عمودي على العمودي على مستوى المتجهين $\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ ومعنى ذلك أنه سوف يقع في نفس مستوى (أو في مستوى يوازي) المتجهين $\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$. وعلى هذا كما سبق أن علمنا أنه يمكـــن وضع هذا المتجه (المطلوب) على الصورة

$$\overrightarrow{A} \wedge (\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C}) = \alpha\,\overrightarrow{B} + \beta\,\overrightarrow{C} \qquad (1)$$

حيث α ، β أعداد قياسية مطلوب البحث عن قيمها.

بضرب العلاقة (I) قياسيا في $\overrightarrow{A}$ للطرفين نحصل على

$$\overrightarrow{A} \wedge (\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{D}) = \alpha(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{D}) + \beta(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{C})$$

حيث وضعنا $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C}$. ويتضح أن الطرف الأيسر= صفر لأنه عبارة عن حاصل ضرب قياسي ثلاثي ذات متجهين متساويين ويصبح

$$\alpha(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}) = -\beta(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{C})$$

$$\frac{\alpha}{(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{C})} = \frac{-\beta}{(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B})} = \lambda \text{ say}$$

بذلك يمكن الحصول على α ، β بدلالة العدد القياسي المجهول λ ويصبح حاصل الضرب الاتجاهي الثلاثي السابق على الصورة (بالتعويض في (I))

$$\overrightarrow{A} \wedge (\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C}) = \lambda(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{C})\overrightarrow{B} - \lambda(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B})\overrightarrow{C}$$

إن هذه المتطابقة صحيحة لجميع المتجهات $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ مهما كانت بذلك سوف تكون صحيحة لأي حالات خاصة من المتجهات الثلاثة فنأخذ مثلا المتجهات الثلاثة هي متجهات الوحدة الأساسية ولكن يجب اختيارهم بحيث لا تعطي المعادلة السابقة معادلة تافهة (أي صفر= صفر) وهذا لا يتأتى إلا في حالة اختيار (١) $\overrightarrow{C}, \overrightarrow{B}$ ليسا متساويين.

(٢) لا تكون $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ مختلفة ولكن لابد أن يتساوى اثنين منهم.

نختار مثلا الآتي $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{B} = \overrightarrow{j}\ ,\ \overrightarrow{C} = \overrightarrow{i}$ فيكون بالتعويض

$$\overrightarrow{i} \wedge (\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i}) = \lambda(\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i})\overrightarrow{j} - \lambda(\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j})\overrightarrow{i}$$

$$\overrightarrow{i} \wedge (-\overrightarrow{k}) = \lambda\,\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{j} = \lambda\,\overrightarrow{j} \Rightarrow \lambda = 1$$

بذلك أمكن الحصول على قيمة λ ويصبح حاصل الضرب الاتجاهي الثلاثي هو

$$\overline{A} \wedge (\overline{B} \wedge \overline{C}) = (\overline{A} . \overline{C}) \overline{D} - (\overline{A} . \overline{B}) \overline{C}$$

ملاحظة : نلاحظ أن حاصل الضرب الاتجاهي الثلاثي $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \wedge \overline{C}$ مختلف عن حاصل الضرب السابق $\overline{A} \wedge (\overline{B} \wedge \overline{C})$ إذ أن هذا المتجه سوف يقع في مستوى المتجهين $\overline{A}, \overline{B}$ ويكون على الصورة

$$(\overline{A} \wedge \overline{B}) \wedge \overline{C} = (\overline{A} . \overline{C}) \overline{B} - (\overline{B} . \overline{C}) \overline{A}$$

باستخدام خواص حاصل الضرب القياسي الثلاثي والاتجاهي الثلاثي يمكن إثبات صحة المتطابقات الآتية :

$$(\overline{A} \wedge \overline{B}).(\overline{C} \wedge \overline{D}) = (\overline{B} . \overline{D})(\overline{A} . \overline{C}) - (\overline{B} . \overline{C})(\overline{A} . \overline{D})$$

$$(\overline{A} \wedge \overline{D}) \wedge (\overline{C} \wedge \overline{D}) = [(\overline{C} \wedge \overline{D}).\overline{A}]\overline{B} - [(\overline{C} \wedge \overline{D}).\overline{B}]\overline{A}$$

$$= [\overline{D}.(\overline{A} \wedge \overline{B})]\overline{C} - [\overline{C}.(\overline{A} \wedge \overline{B})].\overline{D}$$

$$\overline{A} \wedge (\overline{B} \wedge \overline{C}) + \overline{B} \wedge (\overline{C} \wedge \overline{A}) + \overline{C} \wedge (\overline{A} \wedge \overline{B}) = \overline{O}$$

المعادلات الاتجاهية :

إذا كان لدينا متساوية من المتجهات سميت هذه المتساوية بمعادلة اتجاهية ونلاحظ الآتي :

١ــ إذا كان أحد طرفي المعادلة كمية متجهة كان الطرف الآخر كمية متجهة.

٢ــ مقدار أي من طرفي المعادلة متساوي.

٣ــ اتجاه كل من الطرفين واحد.

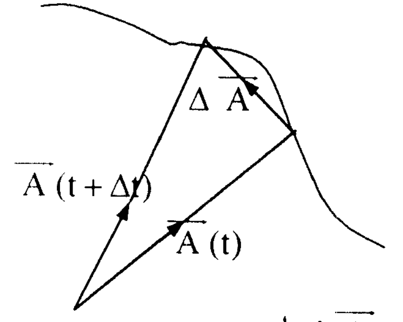
فمثلاً إذا كان لدينا المعادلة الاتجاهية $\overline{A} = \lambda\ \overline{B}$ فهذا يدل على أنه يجب أن يكون $\overline{A}$ في اتجاه (أو يوازي) $\overline{B}$ وأن مقدار $\overline{A}$ يساوي λ = من المرات مقدار المتجه $\overline{B}$.

٤ــ لإيجاد المعادلة الاتجاهية لأي شكل هندسي (مستقيم، مستوى، دائرة، كرة، ...) نتبع نفس خطوات الحل الذي اتبعناه في إيجاد المعادلة القياسية (الكارتيزية) وذلك بأخذ نقطة عامة على الشكل تحقق الشروط الموجودة في المسألة والتي تحدد هذا الشكل الهندسي. وهذه النقطة العامة نعتبر متجه موضعها $\overline{r}$ بالنسبة إلى المحاور المختارة ونرى ماذا يحقق هذا المتجه بذلك نحصل على معادلة اتجاهية في $\overline{r}$. تسمى هذه المعادلة الاتجاهية للشكل. ويمكن الانتقال لإيجاد المعادلة الكارتيزية من هذه المعادلة الاتجاهية وذلك بوضع $\overline{r} \equiv (x, y, z)$.

تفاضل المتجهات :

إن تفاضل المتجهات من الموضوعات الهامة التي تقابلنا عند دراسة الميكانيكا حيث أننا نعلم أن سرعة نقطة مادية مثلا عبارة عن معدل التغير (تفاضل بالنسبة للزمن) متجه موضع النقطة. والعجلة هي تفاضل متجه السرعة.

وقواعد تفاضل المتجهات لا تختلف عن نظيرتها للكميات القياسية فإذا اعتمد متجه $\overline{A}$ على بارامتر معين أو متغير معين كالزمن t مثلا فيقال أن الدالة $\overline{A}(t)$ هي دالة متجه مستمرة في المتغير القياسي t إذا كانت مركباتها a_x, a_y, a_z دوال قياسية مستمرة في المتغير.



إن المتجه $\overrightarrow{A}(t)$ سوف يتغير مقدارا واتجاها بتغير الزمن t ونهايته ترسم منحنى معين أثناء هذا التغير (يسمى هودجراف المتجه كما بالشكل).

فإذا تغير t بمقدار Δt فإن $\Delta \overrightarrow{A}$ تغير المتجه $\overrightarrow{A}$ تساوي

$$\Delta \overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}(t+\Delta t) - \overrightarrow{A}(t)$$

الكمية $\frac{\Delta \overrightarrow{A}}{\Delta t}$ تسمى متوسط التغير في الدالة المتجهة ونهاية هذه الكميــة (إن وجدت) عندما تؤول Δt إلى الصفر تسمى بالمشتقة الأولى أو التفاضل الأول للدالة المتجهة $\overrightarrow{A}$ ويرمز لها بالرمز $\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}$ ويكون

$$\frac{d\overrightarrow{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{A}}{\Delta t} = \frac{da_x}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{da_y}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{da_z}{dt}\overrightarrow{k}$$

وواضح أن المشتقة الأولى للدالة المتجهة هي أيضا دالة متجهة في المتغــير نفسه ويمكن إثبات القواعد الآتية لتفاضل المتجهات :

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = \frac{d\overrightarrow{A}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{A} . \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{A} . \frac{d\overrightarrow{B}}{dt} + \overrightarrow{B}\frac{d\overrightarrow{A}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{A}}{dt} . \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} . \frac{d\overrightarrow{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}) = \frac{d\overrightarrow{A}}{dt} \wedge \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \wedge \frac{d\overrightarrow{B}}{dt}$$

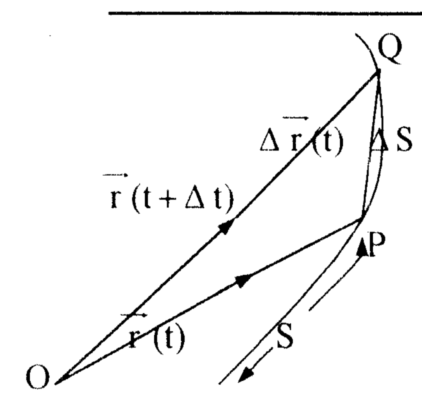
يلاحظ هنا أهمية ترتيب المتجهات عند الضرب الاتجاهي.

$$\frac{d}{dt}(\Phi \overrightarrow{A}) = \Phi \frac{d\overrightarrow{A}}{dt} + \overrightarrow{A}\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]=\left[\vec{A},\vec{B},\frac{d\vec{C}}{dt}\right]+\left[\vec{A},\frac{d\vec{B}}{dt},\vec{C}\right]\left[\frac{d\vec{A}}{dt},\vec{B},\vec{C}\right]$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})]=\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\,\frac{d\vec{C}}{dt}\right)+\vec{A}\wedge\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\wedge\vec{C}\right)$$
$$+\frac{d\vec{A}}{dt}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$$

المعنى الهندسي للمشتقة الأولى لمتجه الموضع $\vec{r}$ بالنسبة للزمن



عند تحرك جسيم P على مسار ما فـإن $\overrightarrow{OP}=\vec{r}(t)$ متجه موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية t حيث

$$\vec{r}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\,\vec{k}$$

وتكون x,y,z هي المعادلات البارامترية لهذا المسار. وعند الانتقال من الموضعP إلى الموضع Q القريب جدا من P في زمن Δt فإن

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)=\overrightarrow{PQ}$$

ويصبح

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$
$$=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\frac{d\vec{r}}{dS}\cdot\frac{dS}{dt}$$

تمثل المشتقة الأولى لمتجه الموضع في هذه الحالة لسرعة الجسيمP حيـث ستكون في اتجاه المماس للمسار عندP ومقدارها هو معـدل تغـير طـول

القوس S الذي يقطعه الجسيم من المسار على المنحنى بالنسبة للزمن إذ أن

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dS}{dt}\frac{d\vec{r}}{dS}=\vec{V}=V\,\vec{e}_V$$

$\vec{e}_V$ متجه الوحدة في اتجاه المماس للمنحنى وهو نفسه اتجاه السرعة.

V هو مقدار السرعة = معدل التغير في طول القوس والمنحنى بالنسبة للزمن $\frac{dS}{dt}$.

وتمثل المشتقة الثانية لمتجه الموضع (أو المشتقة الأولى لمتجه السرعة) عجلة الجسيم P عند أي لحظة

$$\vec{F}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d\vec{V}}{dt}$$

أمثلة عامة على المتجهات

(١) أوجد بطريقتين مختلفتين متجه وحدة عمودي على مستوى المتجهين

$$\vec{A}=3\vec{i}+4\vec{j}+12\vec{k}\;,\;\vec{B}=-4\vec{i}+3\vec{j}$$

الحل : من تعريف حاصل الضرب الاتجاهي نجد أن متجه الوحدة $\vec{e}$ العمودي على مستوى المتجهين $\vec{A},\vec{B}$ يتحدد من العلاقة

$$\vec{e}=\frac{\vec{A}\wedge\vec{B}}{\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|}=\frac{1}{\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&4&12\\-4&3&0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{36\vec{i}-48\vec{j}+25\vec{k}}{\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|}=\frac{-36\vec{i}-48\vec{j}+25\vec{k}}{\sqrt{(36)^2+(48)^2+(25)^2}}$$

$$\vec{e}=-\frac{1}{65}(36\vec{i}+48\vec{j}-25\vec{k})\;.$$

ويمكن إيجاد هذا المتجه $\vec{e}$ باستخدام حاصل الضرب القياسي وذلك بفرض أن

$$\vec{C} = c_1\,\vec{i} + c_2\,\vec{j} + c_3\,\vec{k}$$

هو متجه عمودي على كل من $\vec{A}\,,\,\vec{B}$ بذلك نجد أن

$$\vec{A}\,.\,\vec{C} = 3\,c_1 + 4\,c_2 + 12\,c_3 = 0$$
$$\vec{B}\,.\,\vec{C} = -4\,c_1 + 3\,c_2 = 0$$

ومنها نجد أن

$$c_1 = \frac{3}{4}\,c_2 = -\frac{36}{25}\,c_3$$

بذلك فإن $\vec{C}$ تأخذ الصورة

$$\vec{C} = \frac{c_3}{25}\,(-36\,\vec{i} - 48\,\vec{j} + 25\,\vec{k})$$
$$\left|\,\vec{C}\,\right| = \frac{c_3}{25}\sqrt{(36)^2 + (48)^2 + (25)^2} = \frac{65}{25}\,c_3$$

بذلك يمكن إيجاد $\vec{e}$ والتي سوف تأخذ نفس الصورة السابقة.

(٢) أثبت أن المتجهات الثلاثة الآتية تقع كلها في مستوى واحد

$$\vec{A} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\;,\;\;\vec{B} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j}\;,\;\;\vec{C} = \vec{i} + 3\,\vec{k}$$

الحل : شرط وقوع ٣ متجهات في مستوى واحد هو تلاشي حاصل الضرب القياسي الثلاثي بينهم أي $[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = 0$

$$[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

يساوي صفر أم لا ونجد أنه يساوي

$$= (-9) + 6 + 3 = 0$$

∴ المتجهات تقع في مستوى واحد.

(٣) إذا كانت $\vec{A} \wedge \vec{X} = \vec{B}$ ، $\vec{A} . \vec{X} = \lambda$ فأوجد المتجه $\vec{X}$

الحل : بضرب العلاقة الأولى في $\vec{A}$ اتجاهيا للطرفين من جهة اليمين نجـد أن :

$$(\vec{A} \wedge \vec{X}) \wedge \vec{A} = \vec{B} \wedge \vec{A}$$

$$\therefore \ \vec{X} A^2 - (\vec{A} . \vec{X}) = \vec{B} \wedge \vec{A}$$

$$\therefore \ \vec{X} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{A} + (\vec{A} . \vec{X}) \vec{A}}{A^2} = \frac{1}{A^2}[\vec{A} \wedge \vec{A} + \lambda \vec{A}]$$

(٤) جسيم يتحرك على منحنى معادلاته البارامترية تعطى من :

$$x = e^{-t} \ , y = 2 \cos 3t \ , z = 2 \sin 3t$$

احسب سرعة وعجلة الجسيم عند أي لحظة وعند بداية الزمن $t = 0$.

الحل : متجه موضع عند أي لحظة زمنية هو

$$\vec{r} = e^{-t} \vec{i} + 2 \cos 3t \ \vec{j} + 2 \sin 3t \ \vec{k}$$

يكون متجها السرعة والعجلة هما $\vec{V}(t)$ ، $\vec{F}(t)$ الناتجان من تفاضل متجـه الموضع بالنسبة للزمن مرتين متتاليتين فنحصل على :

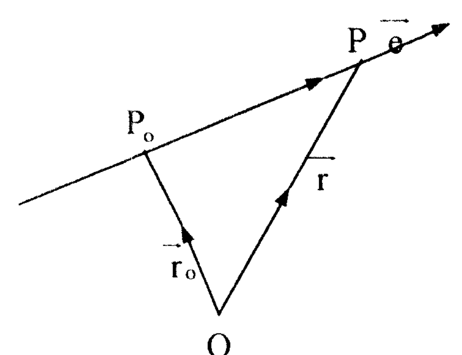
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -e^{-t} \ \vec{i} - 6 \sin 3t \ \vec{j} + 6 \cos 3t \ \vec{k}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e^{-t} \ \vec{i} - 18 \cos 3t \ \vec{j} - 18 \sin 3t \ \vec{k}$$

وعند $t =$ صفر

$$\vec{V}(0) = -\vec{i} + 6 \vec{k} \ , \ \vec{F}(0) = \vec{i} - 18 \vec{j}$$

(٥) أوجد المعادلة الاتجاهية للخط المستقيم إذا علم اتجاهه (متجه وحدة في اتجاهه) ونقطة ما عليه $\vec{r}_o$.



الحل : نعتبر النقطة المعلومة هي $\vec{r}_o = P_o$.
نأخذ نقطة عامة على المستقيم P متجه موضعها هو $\vec{r}$. وذلك بالنسبة لمحاور مارة بالنقطة O كنقطة أصل.
نفرض أن $\vec{e}$ متجه الوحدة في اتجاه هذا الخط وهي معلومة.
من الرسم نجد أن النقطة $\vec{r}$ العامة سوف تحقق المعادلة

$$\overrightarrow{OP_o} + \overrightarrow{P_pP} = \overrightarrow{OP}$$

ويكون المتجه $\overrightarrow{P_pP}$ مساويا لطوله وليكن λ مثلا مضروبا في $\vec{e}$ بذلك النقطة $\vec{r}$ تحقق العلاقة

$$\vec{r}_o + \lambda\,\vec{e} = \vec{r} \qquad (1)$$

λ يعتبر هنا بارامتر وهي سوف تتغير بتغير موضع P على الخط المستقيم. المعادلة (1) تسمى المعادلة الاتجاهية للخط المستقيم بدلالة البارامتر λ ويمكن الحصول من هذه المعادلة على 3 معادلات قياسية وذلك إذا فرضنا أن $\vec{r}$ النقطة العامة لها إحداثيات $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$
والنقطة $\vec{r}_o$ المعلومة يكون لها إحداثيات $\vec{r}_o = x_o\,\vec{i} + y_o\,\vec{j} + z_o\,\vec{k}$
ولنعتبر أن $\vec{e} = e_x\,\vec{i} + e_y\,\vec{j} + e_z\,\vec{k}$ هو متجه الوحدة في اتجاه الخط بذلك بعد التعويض نحصل على من (1)

$$(x_o \vec{i} + y_o \vec{j} + z_o \vec{k}) + \lambda (e_x \vec{i} + e_y \vec{j} + e_z \vec{k}) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

بمساواة المركبات في كل من الطرفين نحصل على :

$$x = x_o + \lambda e_x$$
$$y = y_o + \lambda e_y$$
$$z = z_o + \lambda e_z$$

وهذه تسمى المعادلات البارامترية الكاريتزية للخط المستقيم في الفراغ

ويمكن الحصول على المعادلات الكارتيزية للخط المستقيم بحذف λ فيكون

$$\frac{x - x_o}{e_x} = \frac{y - y_o}{e_y} = \frac{z - z_o}{e_z}$$

ملاحظة : إذا أردنا إيجاد معادلة الخط المستقيم في المستوى فتكون هي

$$\frac{x - x_o}{e_x} = \frac{y - y_o}{e_y}$$

حيث $e_x = \cos\alpha$ ، $e_y = \cos\beta$ هم جيوب تمام اتجاه الخط المستقيم (لاحظ أن متجه الوحدة في أي اتجاه هو جيوب تمام اتجاه هذا الاتجاه) وتصبح المعادلة السابقة على الصورة

$$\frac{x - x_o}{y - y_o} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

ولكن في المستوى $\alpha + \beta = 90^o$ فيكون

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\cos(90 - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha = \frac{1}{m}$$

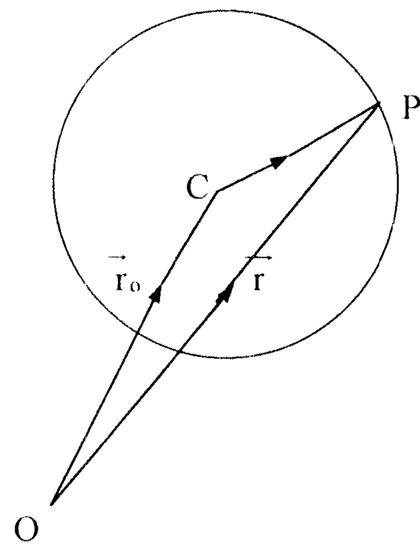
وتصبح معادلة الخط المستقيم هي

$$\frac{y - y_o}{x \;\; x_o} = m$$

حيث $\tan\alpha = m$ = ميل الخط على محور x الموجب.

وهذه المعادلة هي نفسها ما حصلنا عليها في الهندسة التحليلية.

(٦) أوجد معادلة الدائرة التي نصف قطرها a ومعلوم متجه موضع مركزها.



الحل : اعتبر أن متجه موضع مركز الدائرة هو $\vec{r}_o$ وكما هو معتاد نأخذ نقطة عامة على الدائرة P لها متجه الموضع $\vec{r}$ فيكون من الرسم

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP}$$

حيث C مركز الدائرة فيكون

$$\vec{r}_o + \overrightarrow{CP} = \vec{r}$$

ولكن هنا معلوم طول $\overrightarrow{CP}$ فينتج أن

$$\overrightarrow{CP} = \vec{r} - \vec{r}_o$$

$$\left|\overrightarrow{CP}\right| = \left|\vec{r} - \vec{r}_o\right|$$

وهي المعادلة الاتجاهية للدائرة (لأن بها المتجه $\vec{r}$ يحقق هذه المعادلة)

$$\therefore\ a^2 = \overrightarrow{CP}\,.\,\overrightarrow{CP} = (\vec{r} - \vec{r}_o).(\vec{r} - \vec{r}_o)$$

$$= \vec{r}\,.\,\vec{r} - \vec{r}_o\,.\,\vec{r} - \vec{r}\,.\,\vec{r}_o + \vec{r}_o\,.\,\vec{r}$$

$$a^2 = r^2 + r_o^2 - 2\,\vec{r}\,.\,\vec{r}_o$$

وإذا عوضنا عن $\vec{r}$ بالمتجه $x\vec{i} + y\vec{j}$ وعن $\vec{r}_o$ بالمتجه $x_o\vec{i} + y_o\vec{j}$ نحصل على المعادلة الكارتيزية لمنحنى الدائرة على الصورة

$$x^2 + y^2 + x_o^2 + y_o^2 - 2\,x\,x_o - 2\,y\,y_o = a^2$$

أو

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = a^2$$

وهي المعادلة المعتادة الكارتيزية للدائرة المعطاة.

(٧) إذا كان $\overrightarrow{A} = 5t^2\,\overrightarrow{i} + t\,\overrightarrow{j} - t^3\,\overrightarrow{k}$ ، $\overrightarrow{B} = \sin t\,\overrightarrow{i} - \cos t\,\overrightarrow{j}$

فأوجد $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{A})$, $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{B})$, $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B})$

(٨) أوجد متجه الوحدة في اتجاه المماس عند أي نقطة من نقـــط المنحنـــى الذي يعطى بالمعادلات البارامترية

$x = a\cos\omega t \;, y = a\sin\omega t \;, z = b\,t$

(٩) أوجد السرعة والعجلة لجسيم يتحرك على المنحنى

$\overrightarrow{r} = 2\sin 3t\,\overrightarrow{i} + 2\cos 3t\,\overrightarrow{j} + 8t\,\overrightarrow{k}$

عند أي زمن t وعند الزمن t = 2 ثانية وبداية الحركة.

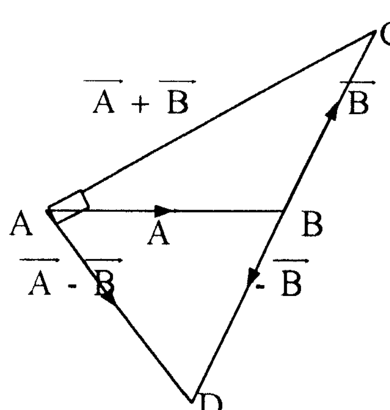
(١٠) جسم يتحرك على المنحنى المستوي $\overrightarrow{r} = 2\cos 3t\,\overrightarrow{i} + 3\sin 3t\,\overrightarrow{j}$

فأثبت أن عجلته ستكون على الصورة

$\overrightarrow{F} = -g\,\overrightarrow{r}$

تمارين على المتجهات وحلولها

(١) إذا كان $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ متجهان وكان $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ عمودياً على $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ فـــأثبت أن $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$



الحل : نمثل المتجهين $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ بـــالضلعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ مـــن المثلـــث ABC علـــى الترتيب فيكون مجموعهما هـــو المتجـــه الممثل بالضلع $\overrightarrow{AC}$. نمد المســـتقيم CB على استقامته إلى النقطة D بحيث يكـــون BC = BD فيكون المتجه $-\overrightarrow{B}$ ممثلاً

بالضلع $\overline{BD}$ ويصبح المتجه $\vec{A} - \vec{B}$ ممثلاً بالضلع $\overline{AD}$.

في المثلث ACD (القائم الزاوية في A لن $\vec{A} + \vec{B} \perp \vec{A} - \vec{B}$) المستقيم AB واصل من رأس القائمة A إلى منتصف الوتر CD (لأن $\left(\left|\vec{B}\right| \perp \left|-\vec{B}\right|\right)$

∴ طول AB يساوي نصف الوتر.

أي أن $\vec{A} = \vec{B}$

حل آخر :

∵ المتجهان $\vec{A} + \vec{B}$ ، $\vec{A} - \vec{B}$ متعامدان

∴ شرط تعامد المتجهين هو تلاشي حاصل ضربهما القياسي

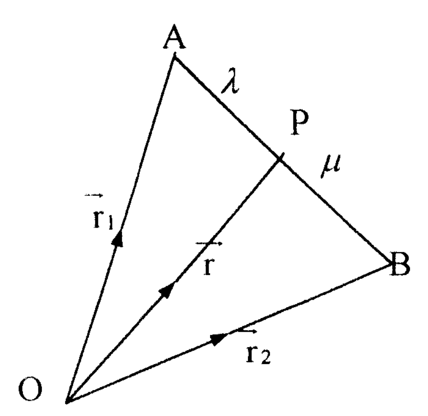
$$(\vec{A} - \vec{B}) . (\vec{A} + \vec{B}) = 0$$

$$\vec{A} . \vec{A} + \vec{A} . \vec{B} - \vec{B} . \vec{A} - \vec{B} . \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow A^2 = B^2 \Rightarrow \vec{A} = \vec{B}$$

(٢) أوجد متجه موضع النقطة P التي تقسم المسافة بين النقطتين $A(\vec{r}_1), B(\vec{r}_2)$ من الداخل بنسبة $\lambda : \mu$

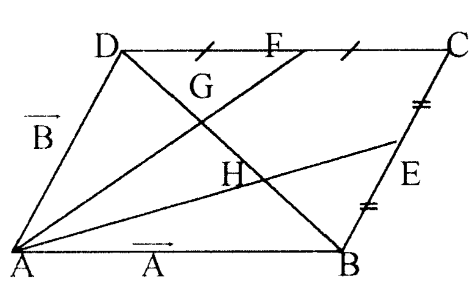
الحل :



$$\mu \, \vec{r}_1 + \lambda \, \vec{r}_2 = (\mu + \lambda) \, \vec{r}$$

$$\vec{r} = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \vec{r}_1 + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \vec{r}_2$$

(٣) أثبت أن المستقيمين الواصلين من رأس متوازي أضلاع إلى منتصف الضلعين المقابلين يقسمان القطر إلى ثلاث أقسام متساوية.



الحل : نفرض أن ABCD متوازي أضلاع E, F منتصفا BC, CD.

من المثلث ABE نجد أن

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{A} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{B}$$

∵ المتجه $\overrightarrow{AH}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{AE}$ فإنه يمكن وضع

$$\overrightarrow{AH} = \lambda\,\overrightarrow{AE} = \lambda\left(\overrightarrow{A} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{B}\right)$$

حيث λ عدد قياسي ما.

بالمثل المتجه $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$

$$\overrightarrow{HB} = \mu\,\overrightarrow{DB} = \mu(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B})$$

μ عدد قياسي ما.

من المثلث ABH نجد أن :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\\ &= \lambda\left(\overrightarrow{A} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{B}\right) + \mu(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B})\end{aligned}$$

$$(\lambda + \mu - 1)\,\overrightarrow{A} + \left(\frac{\lambda}{2} - \mu\right)\overrightarrow{B} = 0$$

وحيث أن $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{A}$ ليسا على استقامة واحدة فإن

$$\lambda + \mu - 1 = 0 \quad , \frac{\lambda}{2} - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 2\mu$$

$$2\mu + \mu - 1 = 0 \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{3} \; , \lambda = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{HB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

∴ المستقيمان الواصلان من رأس متوازي أضلاع إلى منتصف الضلعين المقابلين يقسمان القطر إلى ثلاثة أقسام متساوية.

(٤) إذا كانت $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ ثلاث متجهات تحقق العلاقة

$$\lambda\overrightarrow{A} + \mu\overrightarrow{B} + \nu\overrightarrow{C} = 0$$

حيث λ, μ, ν أعداد قياسية، فإما أن تكون $\lambda = \mu = \nu = 0$ أو تكون المتجهات الثلاثة واقعة في مستوى واحد.

الحل : نلاحظ العلاقة السابقة يمكن وضعها في الصورة

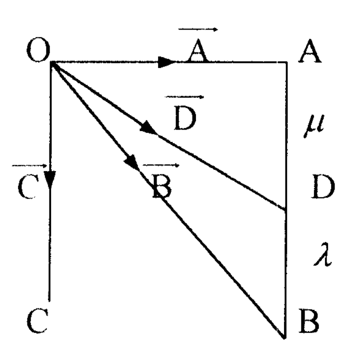
$$\overrightarrow{C} = m\overrightarrow{A} + n\overrightarrow{B}$$

حيث $m = -\frac{\lambda}{\nu}, n = -\frac{\mu}{\nu}$

وهو شرط وقوع المتجهات الثلاثة في مستوى واحد إذا لم تكن

$$\lambda = \mu = \nu = 0$$

حل آخر :



تمثل المتجهات $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$

بالمستقيمات OA, OB, OC

نفرض أن OD = d حيث D

نقطة تقسم AB بنسبة $\mu : \lambda$

كما هو واضح من الرسم في المثلث OAB نجد أن

$$\lambda \overrightarrow{A} + \mu \overrightarrow{B} = (\lambda + \mu) \overrightarrow{D}$$

بالتعويض في العلاقة الأصلية

$$(\lambda + \mu) \overrightarrow{D} + \nu \overrightarrow{C} = 0$$

من ذلك نجد أنه إما أن يكون المتجهان $\overrightarrow{C}, \overrightarrow{D}$ على استقامة واحـــدة أي أن المتجهات الثلاثة $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ في مستوى واحد وإما أن يكون

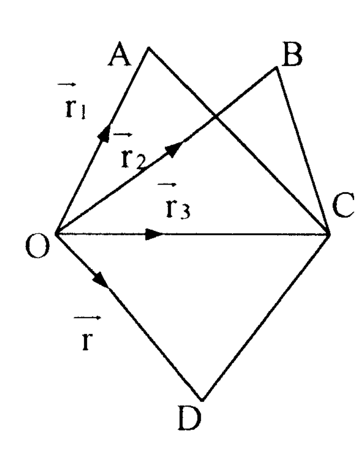
$$\nu = 0 \ , \ \lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$$

بالتعويض في العلاقة الأصلية

$$\lambda \overrightarrow{A} = \lambda \overrightarrow{B}$$

وحيث أن المتجه $\overrightarrow{A}$ لا يوازي المتجه $\overrightarrow{B}$ فإن $\lambda = 0$

(٥) أثبت أن الشرط الضروري والكافي لكي تقع النقط الأربع $A(\vec{r}_1), B(\vec{r}_2), C(\vec{r}_3), D(\vec{r})$ حيث $\vec{r} = \ell \vec{r}_1 + m \vec{r}_2 + n \vec{r}_3$ في مستوى واحد هو $\ell + m + n = 1$



الحل : أولا الشرط الضروري

نفرض أن النقط A, B, C, D تقع فـــي مستوى واحد أي أن المتجهات الثلاثة

$$\overrightarrow{CD} = \vec{r} - \vec{r}_3 \ , \ \overrightarrow{CA} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3$$

$$\overrightarrow{CB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_3$$

تقع في مستوى واحد بذلك نجد أن تتحقق العلاقة

$$\vec{r} - \vec{r}_3 = \alpha(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + \beta(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)$$

حيث α, β أعداد قياسية.

$$\therefore \overrightarrow{r} = \alpha \overrightarrow{r_1} + \beta \overrightarrow{r_2} + (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{r_3}$$
$$\therefore \overrightarrow{r} = \ell \overrightarrow{r_1} + m \overrightarrow{r_2} + n \overrightarrow{r_3}$$
$$\therefore \alpha = \ell , \beta = m , 1-\alpha-\beta = n$$

أي أن $\ell + m + n = 1 \Leftarrow 1 - \ell - m = n$

ثانيا : الشرط كافي :

نفرض صحة العلاقة $\ell + m + n = 1$

$$n = 1 - \ell - m$$

بالتعويض في العلاقة $\overrightarrow{r} = \ell \overrightarrow{r_1} + m \overrightarrow{r_2} + n \overrightarrow{r_3}$ نحصل على

$$\overrightarrow{r} = \ell \overrightarrow{r_1} + m \overrightarrow{r_2} + (1-\ell-m)\overrightarrow{r_3}$$
$$\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_3} = \ell(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_3}) + m(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_3})$$
$$\overrightarrow{CD} = \ell \overrightarrow{CA} + m \overrightarrow{CB}$$

أي أن المتجهات الثلاث $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_3}$ ، $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_3}$ ، $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_3}$ تقع في مستوى واحد.

$\therefore$ النقط الأربع A, B, C, D تقع في مستوى واحد.

(٦) إذا كانت المتجهات الثلاثة $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ متجهات ما في الفراغ وغير واقعة في مستوى واحد فأثبت أن أي متجه $\overrightarrow{D}$ في الفراغ الثلاثي يمكن كتابته دائما في الصورة $\overrightarrow{D} = \lambda \overrightarrow{A} + \mu \overrightarrow{B} + \nu \overrightarrow{C}$

حيث λ, μ, ν أعداد قياسية.

الحل : نفرض أنه يمكن تحليل المتجه $\overrightarrow{D}$ إلى مركبتين إحداهما في اتجاه المتجه $\overrightarrow{A}$ والأخرى في مستوى المتجهين $\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ أي يمكن وضعه في الصورة :

$$\overrightarrow{D} = \lambda \overrightarrow{A} + \lambda' \overrightarrow{G} \qquad (1)$$

حيث λ' عدد قياسي، $\overrightarrow{G}$ متجه في مستوى المتجهين $\overrightarrow{B}\,,\,\overrightarrow{C}$.

وبنفس الطريقة يمكن وضع $\overrightarrow{G}$ في الصورة

$$\overrightarrow{G} = \beta\,\overrightarrow{B} + \gamma\,\overrightarrow{C} \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نحصل على

$$\begin{aligned}\overrightarrow{D} &= \lambda\,\overrightarrow{A} + \lambda'\beta\,\overrightarrow{B} + \lambda'\gamma\,\overrightarrow{C}\\ &= \lambda\,\overrightarrow{A} + \mu\,\overrightarrow{B} + \nu\,\overrightarrow{C}\end{aligned}$$

ولإثبات أن هذه الصورة وحيدة (أي التحليل أوحدي).

نفرض أن $\overrightarrow{D}$ يمكن وضعه في الصورة

$$\overrightarrow{D} = \lambda'\,\overrightarrow{A} + \mu'\,\overrightarrow{B} + \nu'\,\overrightarrow{C}$$

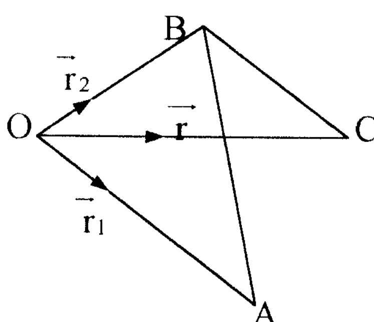
بذلك نجد أن

$$(\lambda - \lambda')\,\overrightarrow{A} + (\mu - \mu')\,\overrightarrow{B} + (\nu - \nu')\,\overrightarrow{C} = 0$$

وحيث أن $\overrightarrow{A}\,,\,\overrightarrow{B}\,,\,\overrightarrow{C}$ لا تقع في مستوى واحد

$$\begin{aligned}\therefore\ \lambda - \lambda' = 0\,,\ \mu - \mu' = 0\,,\ \nu - \nu' = 0\\ \lambda = \lambda'\,,\ \mu = \mu'\,,\ \nu = \nu'\end{aligned}$$

(٧) بين أن الشرط الضروري والكافي لكي تقع النقط الثلاثة $A(r_1), B(r_2), C(r)$ حيث $\overrightarrow{r} = m\,\overrightarrow{r}_1 + n\,\overrightarrow{r}_2$ على استقامة واحدة هو $m + n = 1$



الحل : أولا الشرط ضروري

نفرض أن النقط الثلاثة A, B, C تقع على استقامة واحدة أي يجب أن يتحقق الشرط

$$\overline{BC} = \alpha\,\overline{BA}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_2 = \alpha(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$
$$\vec{r} = \alpha\,\vec{r}_1 + (1-\alpha)\,\vec{r}_2$$
$$\because\ \vec{r} = m\,\vec{r}_1 + n\,\vec{r}_2$$

من ذلك نجد أن

$$\alpha = m\ ,\ 1-\alpha = n$$
$$\therefore\ 1 - m = n \Rightarrow m + n = 1$$

ثانيا : الشرط كافي

نفرض صحة العلاقة $m + n = 1$

$$n = 1 - m$$

بالتعويض في العلاقة $\vec{r} = m\,\vec{r}_1 + n\,\vec{r}_2$ نحصل على

$$\vec{r} = m\,\vec{r}_1 + (1-m)\,\vec{r}_2$$
$$\vec{r} - \vec{r}_2 = m(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$
$$\overrightarrow{BC} = m\,\overrightarrow{BA}$$

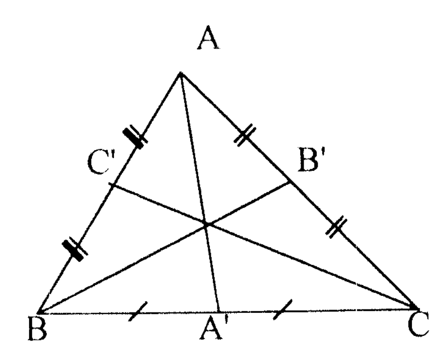
$\therefore$ النقط الثلاث A, B, C تقع على استقامة واحدة.

(٨) أثبت أنه يمكن رسم مثلث أضلاعه توازي وتساوي المستقيمات المتوسطة في مثلث آخر.

الحل : لكي يمكن رسم مثلث أضلاعه توازي وتساوي 'AA', BB', CC لابد وأن يتحقق

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$$

كذلك



$$\left.\begin{aligned} 2\overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ 2\overrightarrow{BB'} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \\ 2\overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

بجمع العلاقات (2) نحصل على

$$2(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) = 0$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$$

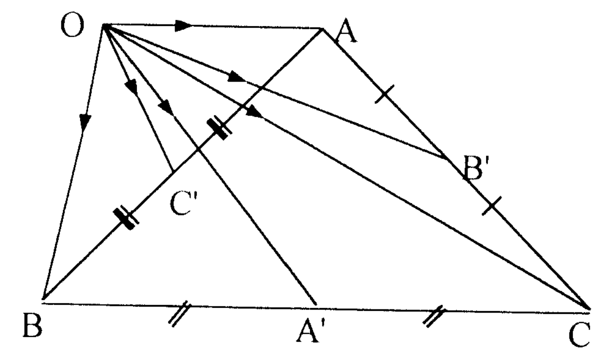
∴ يمكن رسم مثلث أضلاعه توازي وتساوي المستقيمات المتوسطة فـــي مثلث آخر.

(٩) إذا كانت A', B', C' هي منتصفات أضلاع المثلث ABC فأثبت أن

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

حيث O نقطة اختيارية.


الحل :



في المثلث OAB نجد أن :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\,\overrightarrow{OC'} \qquad (1)$$

في المثلث OBC نجد أن :

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OA'} \qquad (2)$$

في المثلث OCA نجد أن :

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = 2\,\overrightarrow{OB'} \qquad (3)$$

بجمع (3) ,(2) ,(1) نحصل على :

$$2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'})$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$$

(١٠) ABCDEF شكل سداسي منتظم مركزه G أثبت المعادلة الاتجاهية الآتية $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 4\,\overrightarrow{AG}$

وإذا كانت N نقطة خارجة فأثبت أيضا المعادلة الاتجاهية الآتية :

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF} = 6\,\overrightarrow{NG}$$

الحل : نصل B, E وكذلك C, F في المثلث ABE نجد أن :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AG} \qquad (1)$$

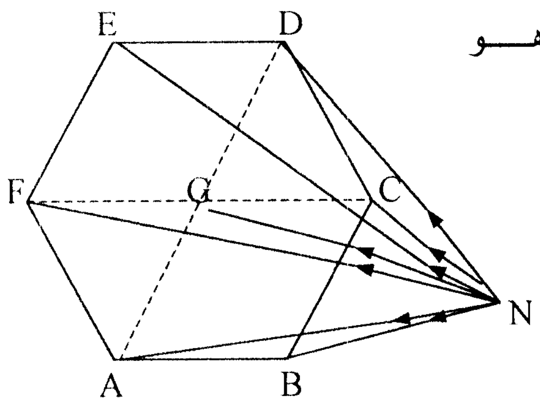
في المثلث ACF نجد أن :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{AG} \qquad (2)$$

بجمع (2) ,(1) نحصل على

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 4\,\overrightarrow{AG}$$

نصل أقطار الشكل السداسي كما هو موضح بالرسم.



في المثلث NAD نجد أن :

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{ND} = 2\,\overrightarrow{NG} \qquad (3)$$

في المثلث NBE نجد أن :

$$\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} = 2\,\overrightarrow{NG} \qquad (4)$$

في المثلث NCF نجد أن :

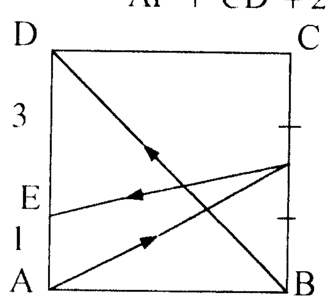
$$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NF} = 2\,\overrightarrow{NG} \qquad (5)$$

بجمع (3), (4), (5) نحصل على

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF} = 6\,\overrightarrow{NG}$$

(١١) ABCD مربع، F منتصف BC، E تقسم AD بنسبة 3 : 1 اثبت أن

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} + 2\,\overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{FE} + 3\,\overrightarrow{BC}$$



الحل : في Δ AFE نجد أن :

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$$
$$= \tfrac{1}{4}\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF}$$
$$= \tfrac{1}{4}\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} \qquad (1)$$

في الشكل CDEF نجد أن :

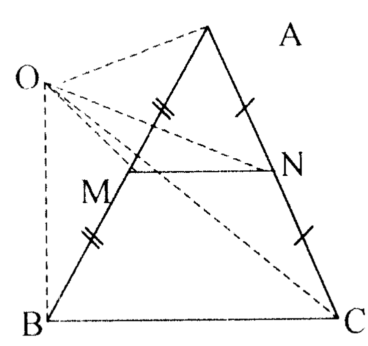
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{FE} + \tfrac{3}{4}\,\overrightarrow{AD}\right)$$
$$= -\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE} + \tfrac{3}{4}\,\overrightarrow{BC}$$
$$= \overrightarrow{FE} + \tfrac{1}{4}\,\overrightarrow{BC} \qquad (2)$$

في Δ BCD نجد أن :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$
$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE} + \tfrac{1}{4}\,\overrightarrow{BC} \qquad (3)$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} + 2\,\overrightarrow{BD} = \tfrac{1}{4}\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF} + \tfrac{1}{4}\,\overrightarrow{BC}$$
$$+ 2\,\overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{FE} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$$
$$= 3\,\overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{FE}$$

(١٢) أثبت باستخدام المتجهات أن الخط الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه.



الحل : نفرض O نقطة اختيارية

في المثلث OAB نجد أن :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\,\overrightarrow{OM} \qquad (1)$$

في المثلث OAC نجد أن :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{ON} \qquad (2)$$

بطرح (2) من (1) نحصل على :

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}) \qquad (3)$$

ولكن

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM}$$

بالتعويض في (3) نحصل على

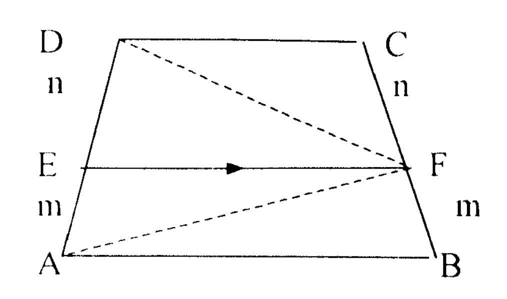
$$\overrightarrow{CB} = 2\,\overrightarrow{NM}$$

أي أن CB يوازي NM ويساوي ضعفه.

∴ الخط الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه.

(١٣) ABCD شكل رباعي فيه E, F نقطتان على AD, BC على الترتيب بحيث أن $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{m}{n}$ برهن على أن

$$n\,\overrightarrow{AB} + m\,\overrightarrow{DC} = (m+n)\,\overrightarrow{EF}$$



الحل : نصل DF, AF

في المثلث AFD نجد أن :

$$n\,\overrightarrow{AF} + m\,\overrightarrow{DF} = (m+n)\,\overrightarrow{EF} \quad (1)$$

في المثلث ABF نجد أن :

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF} \quad (2)$$

في المثلث DCF نجد أن :

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} \quad (3)$$

بالتعويض من (3) ,(2) في (1) نحصل على :

$$n\,\overrightarrow{AB} + n\,\overrightarrow{BF} + m\,\overrightarrow{DC} + m\,\overrightarrow{CF} = (m+n)\,\overrightarrow{EF} \quad (4)$$

ولكن $\frac{BF}{FC} = \frac{m}{n}$

$$n\,\overrightarrow{BF} = m\,\overrightarrow{FC}$$

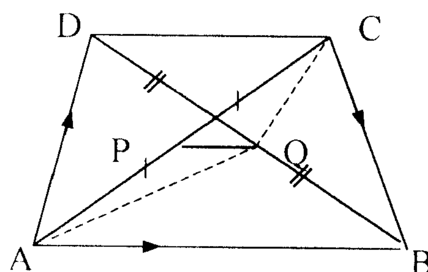
$$n\,\overrightarrow{BF} + m\,\overrightarrow{CF} = 0 \quad (5)$$

بالتعويض من (5) في (4) نحصل على

$$n\,\overrightarrow{AB} + m\,\overrightarrow{DC} = (m+n)\,\overrightarrow{EF}$$

(١٤) ABCD شكل رباعي فيه P, Q منتصفا AC, BC على الترتيب.

أثبت أن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\,\overrightarrow{PQ}$



الحل : نصل AQ, CQ

في المثلث ABD نجد أن :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AQ} \quad (1)$$

في المثلث CBD نجد أن :

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{CQ} \qquad (2)$$

بجمع (2) ,(1) نحصل على

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{CQ}) \qquad (3)$$

ولكن في المثلث ACQ نجد أن :

$$\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{CQ} = 2\,\overrightarrow{PQ} \qquad (4)$$

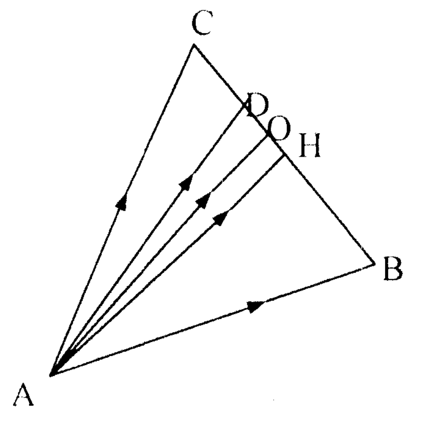
بالتعويض من (4) في (3) نحصل على

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\,\overrightarrow{PQ}$$

(١٥) ABC مثلث، D نقطة على CB تقسمه بنسبة 1 : 2 وكانت H هي منتصف BC، O نقطة ما على BC بحيث أن O تقسمه بنسبة $BO : CO = 7 : 5$ برهن على أن :

(i) $\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} + 3\,\overrightarrow{AH} + 3\,\overrightarrow{AH} = 6\,\overrightarrow{AO}$

(ii) $\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AD}$





الحل : في $\Delta\,ABC$ نجد أن :

$$2\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{AD} \qquad (1)$$

كذلك :

$$5\,\overrightarrow{AB} + 7\,\overrightarrow{AC} = 12\,\overrightarrow{AO} \qquad (2)$$

أيضا

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AH} \qquad (3)$$

بجمع (3) ,(2) نحصل على

$$6\,\overrightarrow{AB} + 8\,\overrightarrow{AC} = 12\,\overrightarrow{AO} + 2\,\overrightarrow{AH}$$

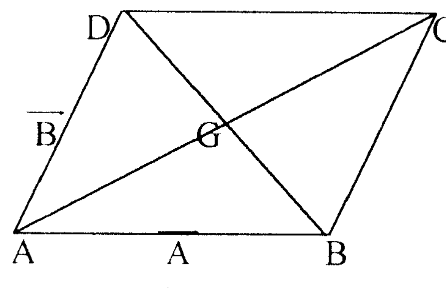
$$3\,\overrightarrow{AB} + 4\,\overrightarrow{AC} = 6\,\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AH}$$

$$\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{AC} - 6\,\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AH}$$

بالتعويض من (3) نحصل على

$$\overrightarrow{AB} + 4\,\overrightarrow{AH} + 2\,\overrightarrow{AC} = 6\,\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AH}$$
$$\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} + 3\,\overrightarrow{AH} = 6\,\overrightarrow{AO}$$

(١٦) أثبت باستخدام المتجهات أن قطري متوازي الأضلاع يتقاطعا في المنتصف.



الحل : نفرض أن متوازي الأضلاع ABCD يتقاطع قطراه في G ونفرض أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A}\ ,\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B}$

في المثلث ABD نجد أن :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$$
$$\overrightarrow{DG} = m\,\overrightarrow{DB} = m(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B})$$

في المثلث ABC نجد أن :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$$
$$\overrightarrow{AG} = m\,\overrightarrow{AC} = m(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$$

في المثلث ADG نجد أن :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$$
$$n(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B} + m(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B})$$
$$(n - m)\,\overrightarrow{A} + (n + m - 1)\,\overrightarrow{B} = \overrightarrow{O}$$

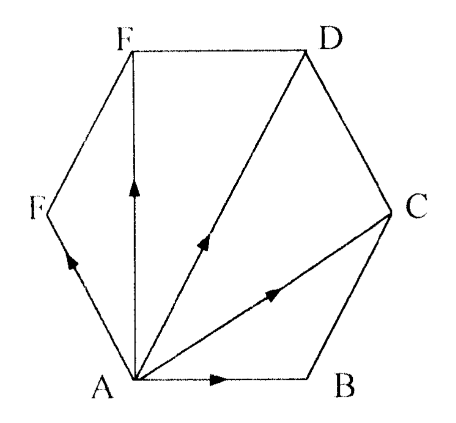
وحيث أن $\overrightarrow{B}\ ,\ \overrightarrow{A}$ ليسا على استقامة واحدة

$$\therefore\ n - m = 0\ ,\ n + m - 1 = 0$$
$$n = m \Rightarrow m + m = 1 \Rightarrow m = n = \tfrac{1}{2}$$

$\therefore$ G منتصف القطرين.

(١٧) إذا كان ABCDEF شكل سداسي منتظم فأثبت أن

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3\,\overrightarrow{AD}$$



الحل : في المثلث ADE نجد أن

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$$

ولكن $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} \qquad (1)$$

في المثلث ACD نجد أن :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$$

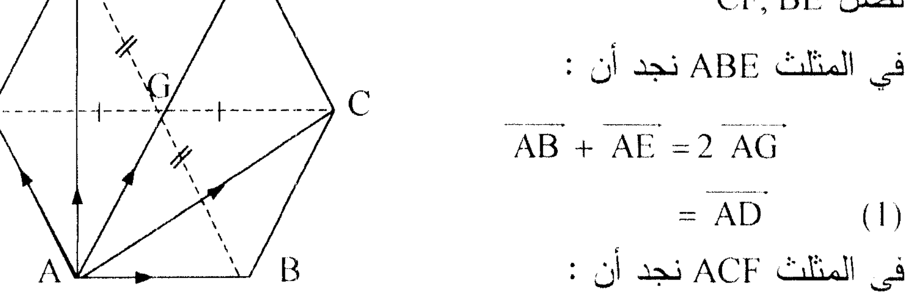
ولكن $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$

$$\therefore\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} \qquad (2)$$

بجمع (2) ,(1) وإضافة $\overrightarrow{AD}$ للطرفين نحصل على :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3\,\overrightarrow{AD}$$

حل آخر :



نصل CF, BE

في المثلث ABE نجد أن :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AG}$$

$$= \overrightarrow{AD} \qquad (1)$$

في المثلث ACF نجد أن :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{AG}$$

$$= \overrightarrow{AD} \qquad (2)$$

بجمع (2) ,(1) وإضافة $\overrightarrow{AD}$ للطرفين نحصل على المطلوب.

الباب الثاني

اختزال مجموعات القوى وبحث شروط اتزانها

مقدمة :

الإستاتيكا هي فرع الميكانيكا الذي يعالج تركيب وتحليل القوى وشروط اتزان الأجسام المادية تحت تأثير القوى. والاتزان هو حالة سكون جسم بالنسبة لأجسام أخرى أو بالنسبة إلى إطار إسناد معين.

وشروط الاتزان تتوقف على كون الجسم المتزن سائل أو غاز أو جامد ففي السوائل والغازات فيدرس اتزانها علم الهيدروستاتيكا والايروستاتيكا. كما نلاحظ أن بالنسبة للجوامد فإن أبعادها وأشكالها تتغير لحد ما تحت تأثير القوى الخارجية وينتج عن ذلك ما يسمى بالتشكل حيث يعتمد مقدار هذا التشكل على شكل وأبعاد الجسم كما يعتمد على القوى المؤثرة. لذلك فالإنشاءات الهندسية يراعى اختيار المواد والأشكال والأبعاد التي تجعل التشكل نتيجة التحميل في أضيق الحدود. ورغم أنه لا يوجد في الطبيعة جسماً صلباً تماماً إلا أنه يمكن اعتبار الجسم صلباً إذا كان مقدار هذا التشكل صغيراً لدرجة إمكان إهماله. لذا يعرف الجسم الصلب بأنه الجسم الذي تظل المسافة بين أي نقطتين فيه ثابتة. وهذا النوع من الأجسام هو ما سوف ندرسه أما دراسة التشكل في الأجسام فيختص بها علم المرونة ومقاومة المواد.

ولكي يتزن الجسم الجاسئ (الصلب) تحت تأثير مجموعة قوى فإن هذه المجموعة من القوى يجب أن تحقق شروطاً معينة تسمى شروط

الاتزان. والتعرف على هذه الشروط يعتبر من صميم دراسة علم الاستاتيكا ولكي نصل إلى هذه الشروط يجب الإلمام بطريقة تركيب (أو جمع) القوى وطريقة استبدال مجموعة من القوى بمجموعة مكافئة لها وهو ما يعرف باختزال مجموعة قوى إلى مجموعة أبسط منها.

ويمكن أيضا معالجة المسائل الاستاتيكية هندسياً (وهو ما يسمى بالاستاتيكا البيانية) أو تعالج رياضياً (وهو ما يسمى بالطريقة التحليلية). وقبل البدء في دراستنا سنبدأ أولاً بعرض سريع لبعض التعريفات والمصطلحات.

النقطة المادية والجسم المتماسك :

عندما يمكن إهمال أبعاد الجسم عند دراسة حركته أو اتزانه يقال أنه نقطة مادية ومفهوم النقطة المادية نسبي ويتوقف على نوع المسألة بمعنى أنه لا يمكن اعتباره نقطة مادية في بعض الأحيان ولا يعتبر كذلك في أحيان أخرى (مثلاً يمكن اعتبار سيارة كنقطة مادية بالنسبة لحركتها أو اتزانها بالنسبة للكرة الأرضية كما أنه يمكن اعتبار أن الأرض كنقطة مادية إذا درسنا حركتها في المجموعة الشمسية حول الشمس).

القوة :

إن حالة الاتزان أو الحركة لجسم ما يتوقف على التأثير المتبادل بينه وبين الأجسام الأخرى وهذا التأثير يقاس بما يسمى بالقوة. والقوة هي كمية متجهة من نوع خاص يسمى بالمتجه المنزلق حيث يعتمد تأثيرها على الجسم على المقدار والاتجاه ونقطة التأثير أو خط العمل والقوة هي المؤثر

الخارجي الذي يعمل إحداث تغيير في حالة الجسم. (وذلك حسب قانون نيوتن الأول) وهناك صور عديدة للقوى في الطبيعة منها قوة الوزن لأي جسم وهي قوة جذب الأرض لهذه الأجسام وتؤثر عند نقطة تسمى بمركز كتلة أو مركز ثقل الجسم وهذه القوى تؤثر دائماً على الأجسام سواء كانت ساكنة أو متحركة. كما أن هناك قوى الشدود في الخيط وقوى المقاومة وقوى ردود الأفعال بين الأجسام المتصلة وهذه سوف نوردها كلها في دراستنا.

بعض المفاهيم الاستاتيكية :

أ) **الجسم الحر والجسم المقيد :** الجسم المتماسك الذي يستطيع أن يشغل أي وضع في الفراغ يسمى جسماً حراً وهذا الجسم يكون غير متصل بأجسام أخرى ويمكن إزاحته عن موضعه وفي أي اتجاه. أما إذا اتصل الجسم بآخر فإنه يصبح غير حر أو يصبح جسماً مقيداً وسوف يصاحب هذا الاتصال ظهور قوى تسمى بقوى الاتصال أو قوى القيود وسوف ندرس مثل هذه القوى في البنود التالية.

ب) **المجموعة المتزنة من القوى :** إذا لم تتغير حالة الجسم تحت تأثير مجموعة من القوى فإنه يقال أن هذه المجموعة تكون متزنة أو أن هذه القوى تكون في حالة اتزان.

جـ) **استبدال مجموعات القوى وتكافؤها :** إذا أمكن استبدال مجموعة القوى المؤثرة على جسم بمجموعة أخرى دون حدوث أي تغيير في حالة الجسم فإنه يقال أن المجموعتين متكافئتين. والمعنى الفيزيائي

لتكافؤ مجموعتين من القوى هو أن تأثير كل من هاتين المجموعتين يولد في الجسم الحر الساكن نفس الحركة أي لا يوجد تغير في حالة الجسم في الحالتين.

إذا انعكست اتجاهات قوى مجموعة من القوى مع الاحتفاظ بنقط تأثيرها فسوف نحصل على مجموعة قوى جديدة تسمى بالمجموعة العكسية ومن الواضح أنه إذا أثرنا على جسم حر بمجموعة من القوى وفي نفس الوقت بالمجموعة العكسية لها فإن الجسم سوف يكون متزن أي أن المجموعة العكسية تتعادل مع المجموعة الأصلية.

د) **محصلة مجموعة من القوى :** وهي أبسط صورة يمكن أن تختزل إليها هذه المجموعة.

هـ) **القوى الخارجية والقوى الداخلية :** إن القوى الخارجية هي تلك القوى التي يتأثر بها الجسم بسبب اتصاله بأجسام أخرى أما القوى الداخلية فهي القوى المتبادلة بين جزيئات الجسم.

و) **القوى المركزة :** إن القوة التي تؤثر على نقطة واحدة من الجسم تسمى قوة مركزة أما القوى التي تؤثر على جميع نقط حجم أو سطح الجسم فتسمى قوى موزعة مع ملاحظة أن تعبير القوة المركزة غير دقيق إذ أنه من الوجه العملية فرض مستحيل التحقيق. أما استخدامنا لهذا التعبير فهو في الحقيقة لوصف محصلة مجموعة من القوى الموزعة. فمثلا قوة الوزن هي في الحقيقة محصلة كل قوى جذب الأرض التي تؤثر على

كل جزيئات الجسم حيث أن هذه القوة تكون مركزة (أو خط عملها سوف يمر عند هذه النقطة التي أسميناها مركز ثقل أو كتلة الجسم.

مبادئ الاستاتيكا :

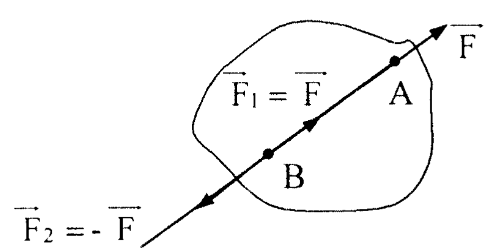
إن كل قوانين الاستاتيكا تشتق من عدد قليل من المبادئ أو البديهيات المقبولة والمعترف بها دون برهان رياضي وهذه المبادئ هي خلاصة تجارب ومشاهدات عديدة وهي :

المبدأ الأول : إذا أثرت على الجسم قوتان وكان الجسم متزن فيجب أن تكون القوتين متساويتين في المقدار ولهما نفس خط العمل ومتضادين في الاتجاه.

المبدأ الثاني : تأثير مجموعة من القوى على جسم يبقى بدون تغيير إذا أضيف إليها أو حذف منها مجموعة قوى متزنة. معنى ذلك أن أي مجموعتين من القوى تكونان متكافئتين إذا كانتا تختلفان عن بعضهما بمجموعة قوى متزنة.

من المبدأين الأول والثاني يمكن البرهنة على أن : نقطة تأثير قوة على جسم ما يمكن نقلها إلى أي نقطة أخرى وتكون واقعة على خط عمل القوة بدون أن يتغير تأثيرها على الجسم.

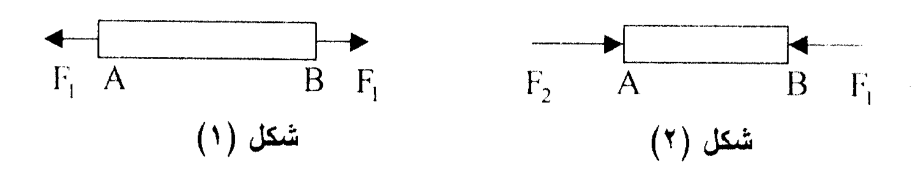
ونبرهن ذلك كالآتي :



نفرض أن القوة $\vec{F}$ تؤثر على الجسم عند نقطة ما منه A. اعتبر نقطة أخرى من نقط الجسم عند B على نفس خط عمل القوة $\vec{F}$. تؤثر عند B بقوتين $\vec{F_1} = \vec{F}$, $\vec{F_2} = -\vec{F}$ وهذه المجوعة لا تتغير في حالة الجسم حسب المبدأ الثاني إذ أنها مجموعة متزنة.

الآن : القوتان $\vec{F}$, $\vec{F_2} = -\vec{F}$ متزنتان حسب المبدأ الأول وبذلك يمكن حذفهما حسب المبدأ الثاني. تتبقى بذلك القوة $\vec{F_1} = \vec{F}$ والتي تؤثر عند B وتكافئ بذلك القوة $\vec{F}$ التي تؤثر في A. معنى ذلك أنه يمكن اعتبار القوة $\vec{F}$ تؤثر عند أي نقطة من خط عملها. **إن المتجه الذي له هذه الخاصية يسمى متجه منزلق.**

نلاحظ أن هذه النتيجة تختص فقط بحالة الاتزان فمثلا إذا كان AB قضيب تؤثر عليه عند A, B قوتان F_1 , F_2 كما بالرسم فإنه يكون متزنا.

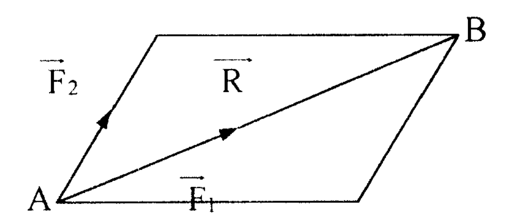


شكل (١) شكل (٢)

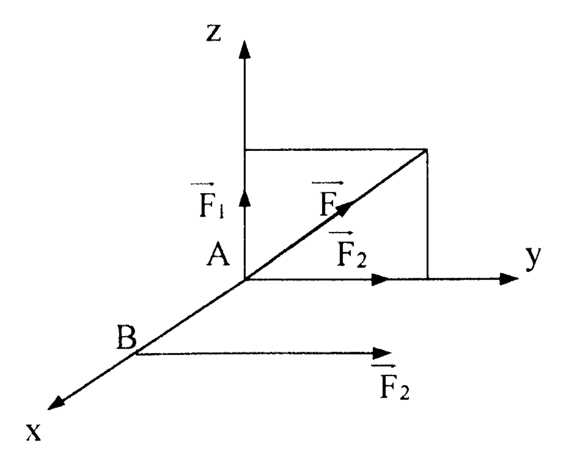
فإذا نقلنا F_1 لكي تؤثر عند B، F_2 لكي تؤثر عند A فإن حالة الجسم لا تتغير من حيث الاتزان أما من حيث الإجهاد الداخلي فقد تغير من حالة الشد شكل (١) (الشد في القضيب عندما يكون القوى تعمل على استطالته) إلى حالة الضغط شكل (٢) (الضغط في القضيب عندما تعمل القوى على انكماشه).

المبدأ الثالث : وهو قانون متوازي الأضلاع.

إذا أثرت قوتان في نقطة ما A من الجسم فمحصلة هاتين القوتين هي قوة تمر بنفس النقطة ويمثلها قطر متوازي الأضلاع المكون من القوتين كضلعين متجاورين فيه.



وهنا يجب أن نفرق بين محصلة قوتين وبين المجموع الاتجاهي لهما فمثلا خذ القوتين $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ تؤثران عند النقط B, A على الترتيب من الجسم كما بالشكل. الأولى في اتجاه محور z والأخرى في اتجاه محور y ولكن تؤثر عند النقطة على محور x.



إن المجموع الاتجاهي للقوتين يمكن الحصول عليه برسم القوتين من أي نقطة في الجسم (ولتكن A مثلا) بذلك يكون هو المتجه $\overrightarrow{F}$. أي أنه

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ في حين أن $\vec{F}$ ليست هي محصلة القوتين $\vec{R}$ حيث لا يمكن للقوة $\vec{F}$ أن تحدث في الجسم نفس تأثير القوتين $\vec{F}_2 , \vec{F}_2$ ($\vec{F} , \vec{R}$ متساويان ولكن غير متكافئان).

المبدأ الرابع : لكل فعل على جسم من جسم أخر يوجد رد فعل يساوي ويضاد هذا الفعل.

مع ملاحظة أن الفعل ورد الفعل لا يكونان مجموعة متزنة وذلك عند دراسة إتزان أحد الجسمين لأن كلا منهما يقع أو يؤثر على جسم مختلف.

وبذلك حسب هذا المبدأ الرابع فإن أي جزيئين من جزئيات الجسم يؤثران على بعضهما البعض بقوتين متساويتين ومتضادين إذا وجهنا الدراسة إلى توازن الجسم كله فإنه حسب المبدأ الثاني يمكن اعتبار أن هذه القوى الداخلية مجموعة متزنة وبالتالي يمكن حذفهما.

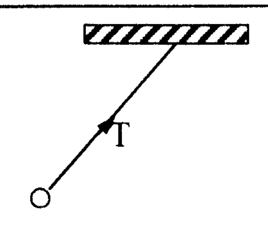
القيود ورد الأفعال :

كما أشرنا أنه إذا اتصل جسم بجسم أخر أو بأجسام أخرى أو استند عليها قيل أن الجسم مقيد وليس حرا ويصاحب هذه القيود قوى وهذه القيود تقيد إزاحة الجسم في الفراغ ومن أمثلة القيود وضع جسم على منضدة فتمنع سقوطه إلى أسفل أو وضع مفصل بين الباب والحائط فيمنع هذا المفصل محاولة انتزاع الباب من الحائط وهكذا ...

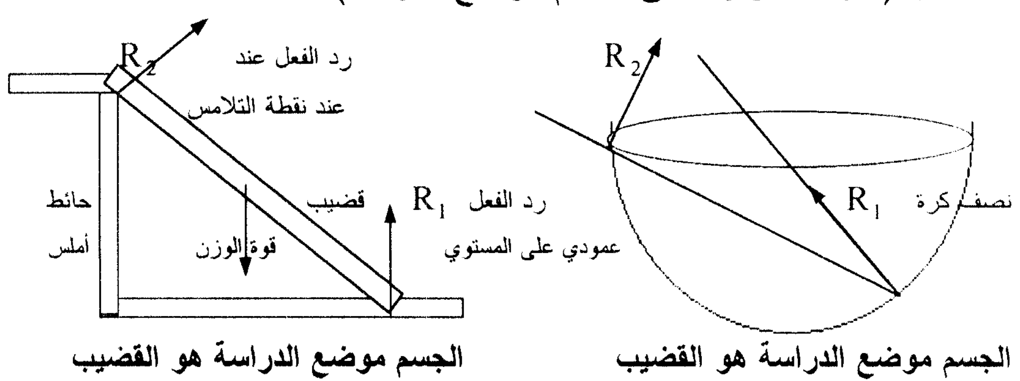
إن القوة التي يؤثر بها الجسم على القيد تسمى الحمل أو الضغط أو الفعل أما القوة التي يؤثر بها الجسم فتسمى برد الفعل (الفعل ورد الفعل هي قوى الاتصال) أما **القوى** التي تؤثر على الجسم ولا تكون ناتجة عن قيود

فتسمى **القوى الفعالة** ومثال ذلك القوى الجاذبية (الأوزان) ومن المهم عادة تعيين اتجاهات ردود الفعل ففي الواقع أنه يمكن دائما تخليص الجسم من قيوده (أي عزله عن الأجسام المتصلة به) وذلك باستبدال الأجسام المقيدة له بردود أفعالها. بذلك يعتبر الجسم المقيد حرا تحت تأثير قواه الفعالة وردود أفعال الاتصال، والتمثيل لهذه القوى عند تأثيرها على الجسم يسمى بياني الجسم الحر. وسوف نناقش فيما يلي اتجاهات ردود فعل بعض القيود علما بأن قيمة رد الفعل تتوقف على القوى الفعالة المؤثرة على المجموعة الميكانيكية بينما يتوقف اتجاهه على الشكل الهندسي للأجسام المتصلة وعامة يكون في اتجاه العمودي على المماس المشترك للجسمين في نقطة الاتصال، وإذا كان أحد هذه السطوح نقطة فيكون رد الفعل عموديا على السطح الآخر وهذا النوع من الاتصال يسمى الاتصال المثالي على عكس الاتصال الطبيعي (وهو المصحوب بإحتكاك) الذي يظهر فيه بجانب رد الفعل العمودي قوى سلبية (القوى السلبية التي لا تظهر إلا بظهور قوى تحاول تغيير الحالة الميكانيكية للجسم) وهذه القوى السلبية تسمى بقوى الاحتكاك وتؤثر في اتجاه المماس المشترك لسطح الاتصال لمنع الحركة وفي معظم التوصيلات الشائعة يكون اتجاه رد الفعل معلوما ويبقى تحديد مقداره.

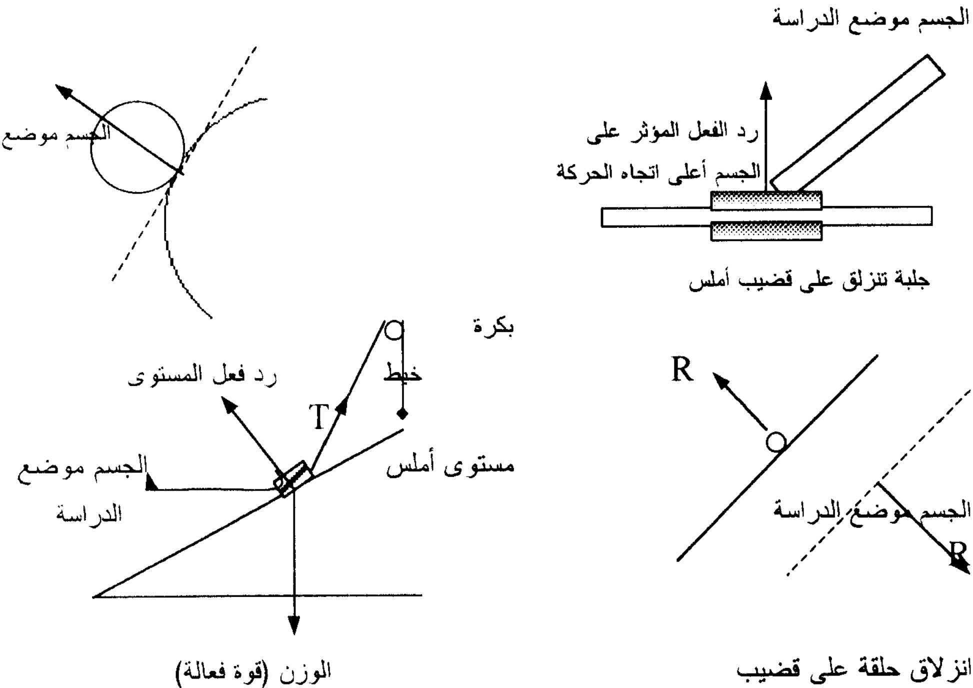
أ — شدة اتصال الجسم بخيط (أو قضيب خفيف) فإن رد الفعل هنا يكون على هيئة شد (أو ضغط) ويكون في اتجاه الخيط (أو القضيب) وذلك نحو نقطة تعليق الجسم ونرمز له بالرمز T.

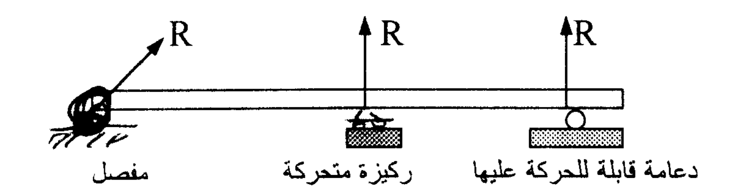


ب ــ عند وضع الجسم على مستوى أملس أو على دعامة للحركة يكون رد الفعل عموديا على المستوى أو عموديا على اتجاه الحركة، كذلك كما أشرنا عالية إذا كان التماس يتم بواسطة سطحين غير مستويين فإن الإزاحة تكون في الاتجاه العمودي على سطحي التماس ويكون رد الفعل في اتجاه هذه الإزاحة لمنعها وذلك عند نقطة التماس وإذا كان أحد سطحي التماس نقطة كان رد الفعل عموديا على السطح الآخر (مثل اتصال جسم بحلقة "أو جلبة" تنزلق على ساق أملس أو ساق يتحرك داخل تجويف مستقيم أملس يكون رد الفعل في الاتجاه العمودي على الساق أو التجويف) انظر الأشكال التالية وبين على الرسم بياني الجسم الحر (القوى المؤثرة على الجسم موضع الدراسة).



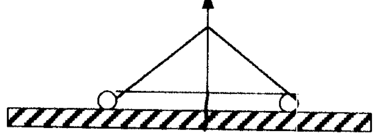
الجسم موضع الدراسة هو القضيب الجسم موضع الدراسة هو القضيب



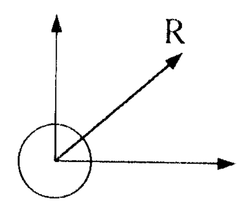


جـ ــ الركائز : إذا ارتكز جسم على ركيزة ما فيحدث عندها رد فعل على الجسم ويكون رد الفعل في اتجاه منع الحركة بعيدا عنه وهنـــاك عـــدة أنواع من الركائز :

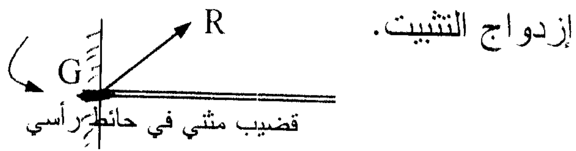
١ــ ركيزة متحركة وعندها رد الفعل يكون عمودي على اتجـــاه الحركـــة للركيزة.



٢ــ ركيزة مفصلية (مفصل) وهو عبارة عن تثبيت نقطة من الجسم بحيـــث يمكن للجسم أن يدور حولها، والمفصل في مستوى عبارة عـــن ثقـــب دائري بداخله مسمار أسطواني والتلامس بين المسمار وحافـــة الثقـــب الدائري يمكن أن يتم في أي نقطة على محيط الدائرة وبذلك يكـــون رد الفعل مجهول الاتجاه ولكنه دائما يمر بمركز الثقب ويمكن تحليله إلـــى اتجاهين متعامدين.



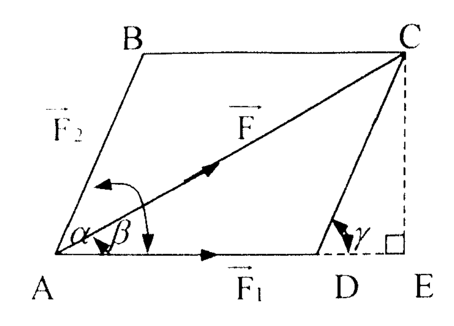
٣ــ ركيزة تامة التثبيت : مثل تثبيت جسم في حائط (كابول) فإن رد الفعـــل في هذه الحالة عبارة عن قوة مجهولة المقدار والاتجاه مضافـــا إليـــها إزدواج التثبيت.



د ــ القضبان الخفيفة : إذا استخدمت القضبان الخفيفة في الإنشاءات كقيـــود فإن القضيب يكون في حالة شد أو في حالة ضغط ويكـــون رد الفعـــل الناتج هو الإجهاد في اتجاهه (الشد أو الضغط).

مجموعات القوى المتلاقية:

١ـ اختزال قوتين متلاقيتين في نقطة:



نفرض أن القوتين $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ تؤثران في النقطة A وأن الزاوية بينهما γ كما في الشكل فالمحصلة $\vec{F}$ لهاتين القوتين حسب قاعدة متوازي الأضلاع تمثل القطر فيه وتساوي مجموعهما الاتجاهي

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad (2.1)$$

والقيمة المطلقة لها يمكن تحديدها من الرسم:

من المثلث AEC القائم الزاوية في E نجد أن :

$$\begin{aligned}(AC)^2 &= (AE)^2 + (EC)^2 \\ &= (AD + DE)^2 + (EC)^2 \\ &= (AD)^2 + 2(AD)(DE) + (DE)^2 + (EC)^2 \\ &= (AD)^2 + 2(AD)(DC\cos\gamma) + (DC\cos\gamma)^2 + (DC\sin\gamma)^2 \\ &= (AD)^2 + 2(AD)(DC)\cos\gamma + (DC)^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) \\ &= (AD)^2 + (DC)^2 + 2(AD)(DC)\cos\gamma\end{aligned}$$

$$\therefore\ F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\gamma \qquad (2.2)$$

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\gamma}$$

وهي تعطي القيمة المطلقة للمحصلة $\vec{F}$ أما اتجاهها مع القوة F_1 يتحدد من

$$\tan\beta = \frac{EC}{AE} = \frac{EC}{AD + DE} = \frac{DC\sin\gamma}{AD + DC\cos\gamma}$$

$$\therefore\ \tan\beta = \frac{F_2\sin\gamma}{F_1 + F_2\cos\gamma} \qquad (2.3)$$

أما اتجاه المحصلة مع القوة F_2 بالمثل يعطى من :

$$\tan\alpha = \frac{F_1 \sin\gamma}{F_2 + F_1 \cos\gamma} \qquad (2.4)$$

وأيضا من المثلث ADC (أضلاع أي مثلث تتناسب مع جيوب الزوايا المقابلة لها) نحصل على :

$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F}{\sin(\pi - \gamma)}$$

$$\therefore \frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F}{\sin\gamma} \qquad (2.5)$$

العلاقتان (2.2), (2.3) تحددان مقدار واتجاه المحصلة $\overline{F}$ بدلالة مركباتها والزاوية التي بينهما.

حالات خاصة :

(أ) إذا كانت القوتين $\overline{F}_1 , \overline{F}_2$ على استقامة واحدة وفي نفس الاتجاه

أي أنه في هذه الحالة تكون $\gamma = 0$

$\overline{F}_2$ $\overline{F}_1$

بالتعويض في (2.2) نحصل على

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2$$
$$= (F_1 + F_2)^2$$

$$\therefore F = F_1 + F_2 \qquad (2.6)$$

أي أن مقدار المحصلة في هذه الحالة يكون مجموع مقداري القوتين اتجاهها في نفس اتجاه القوتين.

(ب) إذا كانت القوتين $\overline{F}_1 , \overline{F}_2$ على استقامة واحدة وفي اتجاهين متضادين

أي أنه في هذه الحالة تكون $\gamma = \pi$

$\gamma = \pi$

$\overline{F}_2$ $\overline{F}_1$

بالتعويض في (2.2) نحصل على

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 F_2$$

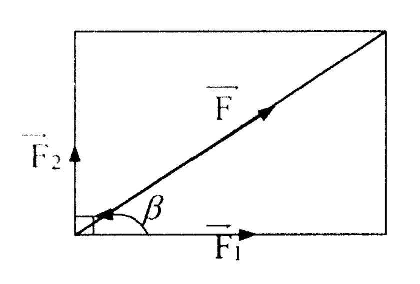
$$F = (F_1 - F_2)^2$$

$$F = F_1 - F_2 \quad \text{or} \quad F = F_2 - F_1 \qquad (2.7)$$

أي أن مقدار المحصلة في هذه الحالة هو الفرق بين مقداري القوتين واتجاهها في اتجاه القوة الكبرى.

(جـ) إذا كانت القوتين $\vec{F}_1 , \vec{F}_2$ متعامدان

أي أنه في هذه الحالة $\gamma = \frac{\pi}{2}$



بالتعويض في (2.2), (2.3) نحصل على :

$$F^2 - F_1^2 + F_2^2 \qquad (2.8)$$

$$\therefore \; F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$\tan\beta = \frac{F_2}{F_1} \qquad (2.9)$$

(د) إذا كانت القوتين $\vec{F}_1 , \vec{F}_2$ متساويتان

أي أنه في هذه الحالة $F_1 = F_2$

بالتعويض في (2.2), (2.3) نحصل على

$$\begin{aligned} F^2 &= F_1^2 + F_1^2 + 2\,F_1^2 \cos\gamma \\ &= 2\,F_1^2 + 2\,F_1^2 \cos\gamma \\ &= 2\,F_1^2\,(1 + \cos\gamma) \\ &= 2\,F_1^2 \left(2\cos^2 \tfrac{\gamma}{2}\right) \\ F^2 &= 4\,F_1^2 \cos^2 \tfrac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \; F = 2\,F_1 \cos\tfrac{\gamma}{2} \qquad (2.10)$$

$$\tan\beta = \frac{F_1 \sin\gamma}{F_1 + F_1 \cos\gamma}$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\gamma}{1+\cos\gamma}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\cos^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\therefore\ \tan\beta = \tan\frac{\gamma}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\gamma}{2} = \alpha$$

أي أن المحصلة في هذه الحالة تنصف الزاوية بين القوتين.

مسألة تحليل قوة محددة $\overrightarrow{F}$ إلى مركبتين F_1, F_2 مسألة عكسية لمسائل إيجاد المحصلة ويلاحظ أنه يوجد عدد لانهائي من الحلول لها ولتحديد حل يجب أن تعطى شروط إضافية.

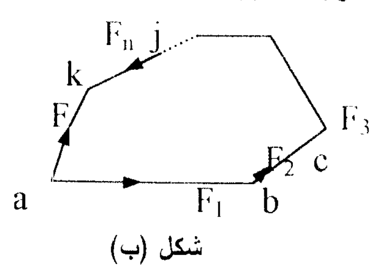
(i) خط عمل المركبات (اتجاهها). (ii) مقدار واتجاه إحداها.

(iii) مقداريهما. (iv) مقدار إحداهما واتجاه الأخرى

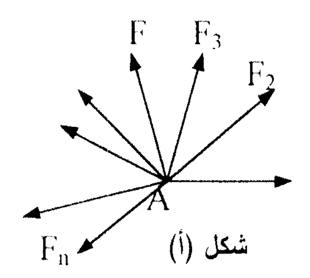
٢ــ اختزال مجموعة n من القوى المتلاقية في نقطة :

نفرض أن مجموعة من القوى $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \ldots, \overrightarrow{F_n}$ تؤثر في نقطة A لإيجاد محصلة مثل هذه المجموعة من القوى فإنه يمكن إيجادها بطريقتين بيانيا أو تحليليا

(i) الطريقة البيانية :



شكل (ب)



شكل (أ)

لإيجاد محصلة مجموعة القوى $\vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , ... \vec{F}_n$ التي تؤثر في نقطة A بيانيا نأخذ نقطة اختيارية a ونرسم منها المستقيم ab موازيا للقوة F_1 فيمثلها مقدارا واتجاها ومن b نرسم المستقيم bc موازيا للقوة F_2 فيمثلها مقدارا واتجاها ثم من c نرسم cd موازيا للقوة F_3 فيمثلها مقدارا واتجاها وهكذا ... حتى نصل إلى القوة F_n ونرسم المستقيم jk موازيا لها فيمثلها مقدارا واتجاها نصل نقطة البداية للقوة الأولى a مع نقطة النهاية للقوة الأخيرة k فنحصل على المستقيم ak الذي يمثل المحصلة مقدارا واتجاها كما في شكل (ب) نعود إلى شكل (أ) ونرسم مستقيما من A موازيا ومساويا للمستقيم ak من شكل (ب) فنحصل على محصلة القوى كما هو موضح في شكل (أ) ويمكن توضيح ذلك بأننا نوجد محصلة كل قوتين على التوالي في الشكل.

فمثلا محصلة القوتين $\vec{F}_1 , \vec{F}_2$ هي $\vec{F}_{12}$ وتعطى من

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 , \vec{F}_2$$

ومحصلة القوتين $\vec{F}_{12} , \vec{F}_3$ هي $\vec{F}_{13}$ وتعطى من

$$\vec{F}_{13} = \vec{F}_{12} , \vec{F}_3$$
$$= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 , \vec{F}_3$$

وهكذا ... في النهاية نجد أن محصلة القوتين $\vec{F}_{1,n-1} , \vec{F}_n$ لتكن $\vec{F}$ وتعطى من

$$\vec{F} = \vec{F}_{1,n-1} + \vec{F}_n$$
$$= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \vec{F}_m \qquad (2.11)$$

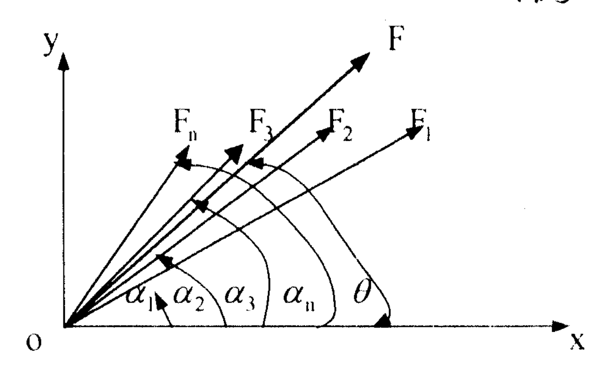
وبذلك فإن مجموعة القوى المؤثرة في نقطة تكافئ قوة واحدة (المحصلة) وتؤثر في نفس النقطة وتساوي المجموع الاتجاهي لهذه القوى.

وكما هو واضح فإن المحصلة $\overrightarrow{F}$ يمكن الحصول عليها بيانيا كما في الشكل وذلك بجمع القوى حسب قاعدة كثير الأضلاع (مضلع القوى).

(ii) الطريقة التحليلية :

(أ) إذا كانت مجموعة القوى مستوية أي تقع في مستوى واحد :

نفرض أن مجموعة القوى $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \ldots \overrightarrow{F_n}$ المؤثرة في النقطة o وتقع في المستوى xy وتصنع زوايا $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ مع الاتجاه الموجب لمحور ox على الترتيب.



فتحليل القوى في الاتجاهين المتعامدين ox, oy نجد أن :

$$F_x = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 + \ldots + F_n \cos\alpha_n$$
$$F_y = F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 + \ldots + F_n \sin\alpha_n$$

بذلك أمكن تجميع القوى المستوية المؤثرة عند o إلى قوتين فقط F_x, F_y تؤثران عند o في الاتجاهين المتعامدين ox, oy وبتحصيل هاتين المركبتين إلى قوة واحدة نجد أنها هي $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y)$ حيث سيكون هنا

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2$$

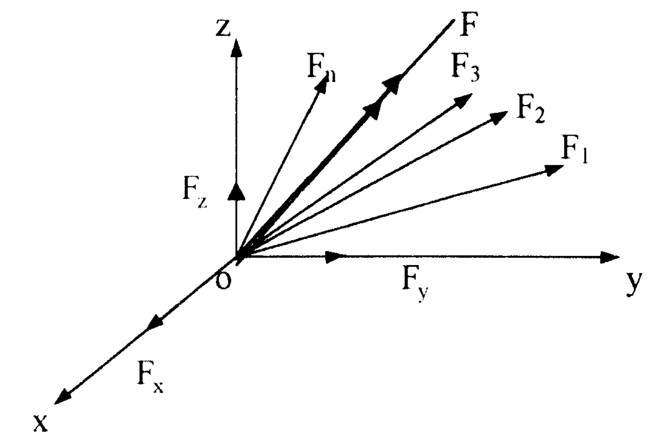
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

وهي تعطي مقدار المحصلة أما اتجاهها مع محور ox فيعطى من :

$$\tan = \frac{F_y}{F_x} \qquad (2.13)$$

(ب) إذا كانت مجموعة القوى في الفراغ

ففي هذه الحالة بتحليل القوى في اتجاه الثلاث محاور المتعامدة ox, oy, oz نجد أن :



$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{m=1}^{n} F_{m\,x} \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots + F_{ny} = \sum_{m=1}^{n} F_{m\,y} \\ F_z &= F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \ldots + F_{nz} = \sum_{m=1}^{n} F_{m\,z} \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

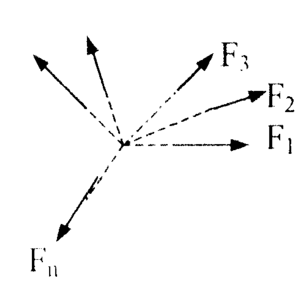
حيث F_x , F_y , F_z مركبات المحصلة $\overrightarrow{F}$ في اتجاه محاور الإحداثيات x, y, z على الترتيب.

F_{mx} , F_{my} , F_{mz} مركبات القوى F_m على نفس المحـــاور. وعندئـــذ يتحـــدد مقدار واتجاه المحصلة $\vec{F}$ من العلاقات :

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \qquad (2.15)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos(F, x) = \frac{F_x}{F}, \cos(F, y) = \frac{F_y}{F}, \cos(F, z) = \frac{F_z}{F} \qquad (2.16)$$



يلاحظ أن القوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots \vec{F}_n$ المؤثـــرة في نقاط مختلفة من الجسم بحيث تتقابل خطـوط عملها كما في الشكل تؤول إلى الحالة الســـابقة حيث أن نقط تأثير أي قوة يمكن نقلها إلى نقطـة أخرى على خط عملها دون تغيير تأثيرها.

شروط الاتزان :

مما سبق نعلم أن مجموعـــة القوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots \vec{F}_n$ المؤثـــرة أو المتقابلة في نقطة تكافئ قوة واحـــدة $\vec{F}$ (المحصلة) لذلـــك فـــإن الشـــرط الضروري والكافي لاتزان مثل هذه المجموعة هو أن تكـــون هـــذه القـــوة (2.11) تساوي الصفر أي أن :

$$\vec{F} = \sum_{m=1}^{n} \vec{F}_m = \vec{O} \qquad (2.17)$$

وهذه المعادلة الاتجاهية تكافئ ثلاث معادلات قياسية (في الفراغ) (2.14)

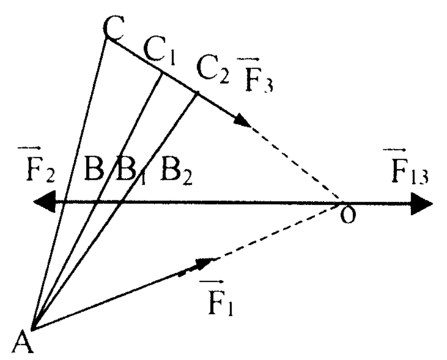
$$F_x = \sum_{m=1}^{n} F_{mx} = 0, F_y = \sum_{m=1}^{n} F_{my} = 0, F_z = \sum_{m=1}^{n} F_{mz} = 0 \qquad (2.18)$$

وبيانيا فإن هذا الشرط يعني أن مضلع القوى مقفلا أي أنه نهاية القوة الأخيرة ينطبق على بداية القوة الأولى.

حالة القوى الثلاث :

١ـ إذا اتزنت ثلاث قوى غير متوازية فإن خطوط عملها تتلاقى في نقطة واحدة.

البرهان :



نفرض أن القوى الثلاثة $\vec{F}_1 , \vec{F}_2, \vec{F}_3$ متزنة وأن A, B أي نقطتين على خط عمل القوتين $\vec{F}_1 , \vec{F}_2$ على الترتيب كما في الشكل.

حيث أن القوى الثلاث متزنة فإنها كمجموعة لا تستطيع إدارة الجسم حول المستقيم AB وفي نفس الوقت فإن كل من القوتين $\vec{F}_1 , \vec{F}_2$ لا تستطيع إدارة الجسم حول نفس المستقيم حيث أن كل منهما تقابله وبذلك فإن القوة الثالثة $\vec{F}_3$ لا تستطيع إدارة الجسم حول هذا المستقيم أي أن AB يجب أن يقابل خط عمل القوة $\vec{F}_3$ وليكن في النقطة C وبالمثل فإن المستقيمات $AB_1, AB_2,$ ... تقابل خط عمل القوة $\vec{F}_3$ حيث... $B_1, B_2,$ نقط عمل القوة $\vec{F}_2$ وبذلك فإن القوة $\vec{F}_3$ في المستوى الذي يحتوي خط عمل القوة $\vec{F}_2$ ويمر بالنقطة A وحيث أن A أي نقطة على خط عمل القوة $\vec{F}_1$ فإن المستوى السابق الذي يحتوي على خطي عمل القوتين $\vec{F}_2 , \vec{F}_3$ يمر بخط عمل القوة $\vec{F}_1$ أي أن القوى الثلاث تقع في مستوى واحد وعندئذ فأن خطي عمل أي قوتين

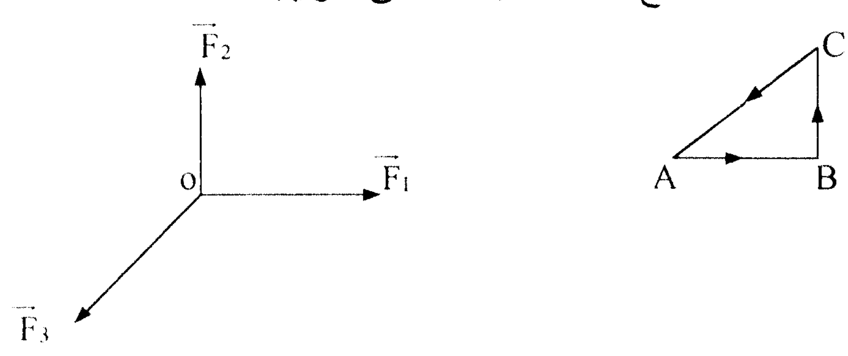
ولتكن $\vec{F}_1 , \vec{F}_3$ يتقاطعان في نقطة مثل o بنقل نقط تأثيرها في o وإيجـــاد محصلتهما $\vec{F}_{13}$ بقاعدة متوازي الأضلاع نجـــد أن $\vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3$ تكـــافئ $\vec{F}_2, \vec{F}_{13}$ أي أن الجسم متزن تحت تأثير القوتين $\vec{F}_2, \vec{F}_{13}$ ومما سبق فـــأن هذا لا يتأتى إلا إذا كانتا متساويتين في المقدار ومتضـــادتين فـــي الاتجـــاه وخطي عملهما منطبقان ولكن خط عمل القوة $\vec{F}_{13}$ يمر بالنقطةo وبذلك فـــأن خط عمل القوة $\vec{F}_2$ يجب أن يمر هو الآخر بنفس النقطة وبذلك فأن الثـــلاث قوى المتزنة تلاقت في نقطة.

نلاحظ أن هذا الشرط ضروري وغير كافي حيث أن تقـــابل ثـــلاث قوى في نقطة لا يستلزم اتزانهم.

٢ــ قاعدة مثلث القوى :

إذا أثرت ثلاث قوى في نقطة مادية وكـــانت ممثلـــة فـــي المقـــدار والاتجاه بأضلاع مثلث مأخوذة في ترتيب دوري واحد فأن هذه القوة تكـــون متزنة.

البرهان : نفض أن $\vec{F}_1 , \vec{F}_2, \vec{F}_3$ ثلاث قوى تؤثر في نقطة o ويمثلها فـــي المقدار والاتجاه الأضلاع AB, BC, CA على الترتيب.



في المثلث ABC فنجد أن

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{O}$$

أي أن

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{O}$$

أي أن المحصلة تتلاشى وعليه تكون القوى الثلاث متزنة.

٣ـ عكس قاعدة مثلث القوى :

إذا اتزنت ثلاث قوى متلاقية في نقطة فان هذه القوى يمكن تمثيلها مقدارا واتجاها بأضلاع مثلث مأخوذة في ترتيب دوري واحد.

البرهان :

بفرض أن $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ ثلاث قوى متزنة متلاقية في النقطة o نأخذ البعدين oB, oA على خط عمل القوتين $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ أي أن

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OC}$$

$$\therefore \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{O}$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{O}$$

$$\therefore \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{CO}$$

أي أ نه يمكن تمثيل القوى الثلاث $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ بأضلاع المثلث oAC

٤ـ قاعدة لامي :

إذا أثرت ثلاث قوى في نقطة مادية وكانت متزنة فان مقدار كل قوة يتناسب مع مقدار جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الآخريتين.

البرهان :

نفرض أن $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ ثلاث قـــوى متزنة تؤثر في النقطـــة o وأن oAC مثلث القوى

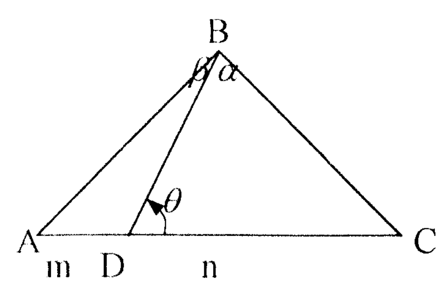
$$\therefore \frac{F_1}{oA} = \frac{F_2}{AC} = \frac{F_3}{Co}$$

بتطبيق العلاقة التي تنص على أن الأضلاع تتناسب مع جيوب الزوايا المقابلة لها في أي مثلث قوى يمثلها نجد أن

$$\frac{F_1}{\sin(ACo)} = \frac{F_2}{\sin(CoA)} = \frac{F_3}{\sin(oAC)}$$

$$\therefore \frac{F_1}{\sin(F_2 \hat{,} F_3)} = \frac{F_2}{\sin(F_3 \hat{,} F_1)} = \frac{F_3}{\sin(F_1 \hat{,} F_2)}$$

وأخيرا فيما يتعلق بالقوى الثلاثة فان هناك علاقة مثلثية هامة تستخدم فـــي حل كثير من المسائل يمكن صياغتها في الصورة الآتية :



في المثلث المقابل ABC المســـتقيم BD يقسم القاعدة AC بنسبة m : n

وعندئذ فإن :

$$\frac{m}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin A}, \frac{n}{\sin\alpha} = \frac{BD}{\sin C}$$

ومنها نجد أن :

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin\beta \sin C}{\sin\alpha \sin A}$$

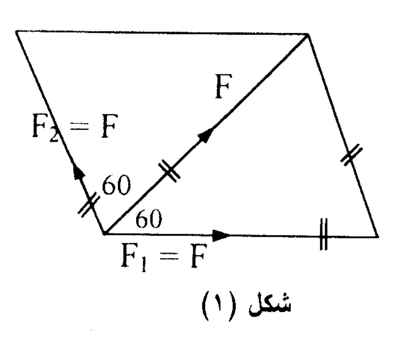
$$\therefore\ \theta = \beta + A = \pi - (\alpha + C)$$

وبذلك فإن

$$\left.\begin{aligned} m\cot\beta - n\cot\alpha &= (m+n)\cot\theta \\ n\cot A - m\cot C &= (m+n)\cot\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

مثال (١) : أوجد الزاوية بين قوتين متساويتين قيمة كل منهما F عندما تكون محصلتهما تساوي F، تساوي $\sqrt{3}\,F$ مرة أخرى.

الحل :



شكل (١)

$$\because\ F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\gamma \quad (1)$$

في الحالة الأولى : نفرض أن الزاوية بين القوتين γ_1

$$F = F, F_1 = F, F_2 = F$$

بالتعويض في (1) نحصل على

$$F^2 = F^2 + F^2 + 2F^2\cos\gamma_1$$

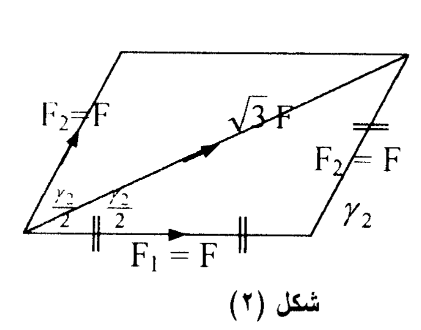
$$-F^2 = 2F^2\cos\gamma_1 \Rightarrow \cos\gamma_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \gamma_1 = 120^\circ$$

في الحالة الثانية : نفرض أن الزاوية بين القوتين γ_2

$$F = \sqrt{3}\,F, F_1 = F, F_2 = F$$

بالتعويض في (1) نحصل على



شكل (٢)

$$3F^2 = F^2 + F^2 + 2F^2\cos\gamma_2$$

$$F^2 = 2F_2\cos\gamma_2$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma_2 = 60^\circ$$

ويمكن حل المسألة بيانيا كما بالشكلين المقابلين فانه في الحالة الأولى يتضح الجواب مباشرة من شكل (١). أما في الحالة الثانية فمن مثلث القوى نجد أن

$$\frac{F}{\sin \frac{\gamma_2}{2}} = \frac{\sqrt{3}\,F}{\sin(\pi - \gamma)}$$

$$\frac{1}{\sin \frac{\gamma_2}{2}} = \frac{F}{\sin \gamma_2}$$

$$\sin \gamma_2 = \sqrt{3} \sin \frac{\gamma_2}{2}$$

$$2 \sin \frac{\gamma_2}{2} \cos \frac{\gamma_2}{2} = \sqrt{3} \sin \frac{\gamma_2}{2}$$

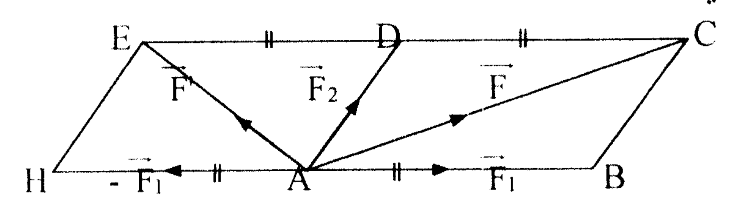
$$\cos \frac{\gamma_2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\gamma_2}{2} = 30^\circ \Rightarrow \gamma_2 = 60^\circ$$

مثال (٢) : قوتان متلاقيتان في نقطة، دارت محصلتهما زاوية قائمة عندما انعكس اتجاه إحداها أثبت أنهما متساويتان في المقدار.

الحل : سنستخدم حلا بيانيا بالرسم.

نفرض أن $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ هما القوتين وأن $\vec{F}$ هي محصلتهم. إذا انعكس اتجاه $\vec{F_1}$ وأصبحت القوة الجديدة $-\vec{F_1}$ فإن المحصلة ستكون $\vec{F'}$ حيث الزاوية بين $\vec{F}, \vec{F'}$ تساوي 90°.



فلدينا من الرسم $\overline{AD}$ يمثل $\overrightarrow{F_2}$ وهو يكون واصل من A رأس القائمة إلـى منتصف الوتر EC لأن $\overline{DE}$ يمثل $\overrightarrow{F_1}$ - ، $\overline{DC}$ يمثل $\overrightarrow{F_1}$ وكلاهما له نفـس الطول بالتالي يساوي نصف الوتر (نظرية).

أي أن مقدار $\overrightarrow{F_2}$ هو نفسه مقدار $\overrightarrow{F_1}$ حيث

$$AD = \tfrac{1}{2}\ EC = DC$$
$$F_2 = F_1$$

ويمكن حل المثال كما يلي :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$
$$\overrightarrow{F'} = -\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$

وحيث أن $\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{F'}$ فلا بد وأن يكون

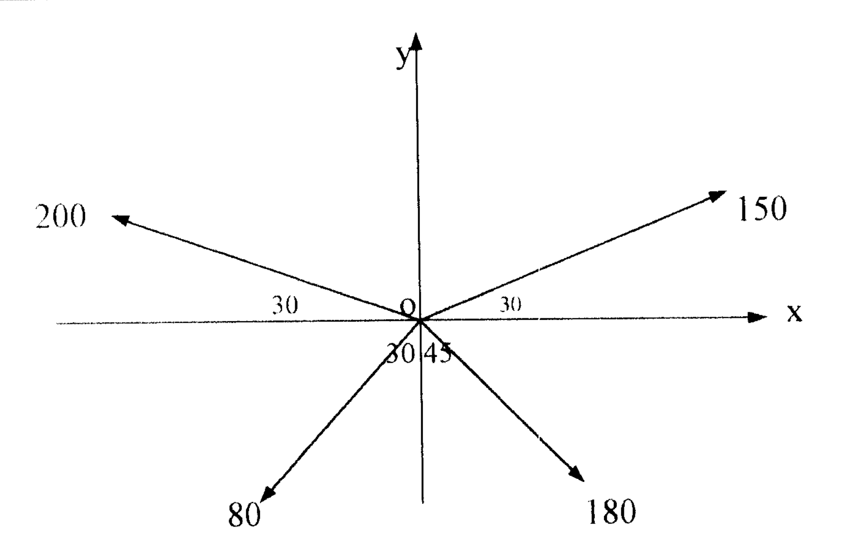
$$\overrightarrow{F}\ .\ \overrightarrow{F'} = 0$$
$$(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2})\ .(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) = 0$$
$$-\overrightarrow{F_1}\ .\ \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_1}\ .\overrightarrow{F_2} - \overrightarrow{F_2}\ .\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\ .\overrightarrow{F_2} = 0$$
$$-F_1^2 + F_2^2 = 0$$
$$F_2^2 = F_1^2 \Rightarrow F_2 = F_1$$

مثال (٣) : أوجد محصلة مجموعة القوى المستوية الآتية المؤثرة في نقطة

$$F_1(150, 30^o),\ F_2(200, 150^o),\ F_3(80, -120^o),\ F_4(180, -45^o)$$

الحل : بتحليل هذه القوى في اتجاهي x, y نجد أن :

$$F_x = 150 \cos 30 + 200 \cos 150 + 80 \cos (-120) + 80 \cos(-45)$$
$$= 150\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 200\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 80\left(-\frac{1}{2}\right) + 80\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 43.96$$
$$F_y = 150 \sin 30 + 200 \sin 150 + 80 \sin (-120) + 80 \sin (-45)$$
$$= 150\left(\frac{1}{2}\right) + 200\left(\frac{1}{2}\right) + 80\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 80\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -21.54$$



مقدار المحصلة F يتحدد من

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$
$$= \sqrt{(43.96)^2 + (-21.54)^2} = 48.82$$

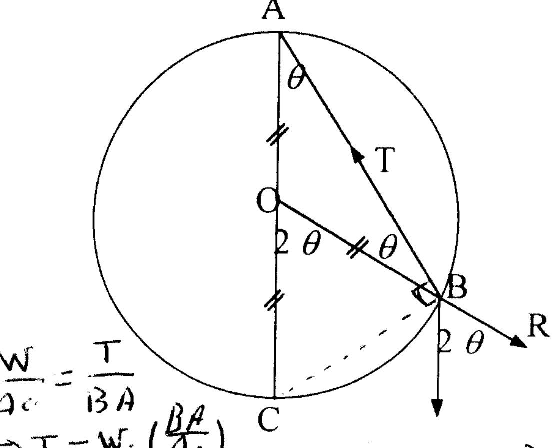
اتجاه المحصلة مع محور ox يتعين من

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-21.54}{43.96} = -0.49 \Rightarrow \theta = 335^o = -25^o$$

مثال (٤) : خرزة وزنها w يمكن أن تنزلق على سلك دائري أملس في مستوى رأسي وصلت الخرزة إلى أعلى نقطة في السلك بواسطة خيط خفيف. فإذا كان الخيط في وضع الاتزان مشدودا ويصنع زاوية θ مع الرأسي. أوجد مقدار الشد في الخيط ورد فعل السلك على الخرزة.

الحل : B هو موضع الخرزة في وضع الاتزان.

المثلث AOB هو مثلث القوى وبذلك يكون $\frac{w}{AO} = \frac{R}{OB} = \frac{T}{BA}$



ولكن $OB = OA$

$\therefore\ R = W$

كذلك

$$T = \frac{W\,(BA)}{AO} = \frac{2W\,(BA)}{2(AO)}$$

$$= 2W\,\frac{BA}{AC} = 2\,W\cos\theta$$

$\frac{W}{Ac} = \frac{T}{BA} \Rightarrow T = W\cdot\left(\frac{BA}{Ac}\right) \rightarrow \frac{BA}{Ac} = \cos\theta\ ,\ \frac{BA}{2Ao} = \cos\theta \Rightarrow \left(\frac{BA}{Ac}\right) = 2\cos\theta$

$\therefore\ T = 2W\cos\theta$

ويمكن حل المسألة باستخدام قاعدة لامي

T

$\pi - \theta$

$\pi - \theta$ 2θ R

W

$$\frac{W}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{R}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{T}{\sin 2\theta}$$

$$\frac{W}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin\theta} = \frac{T}{\sin 2\theta}$$

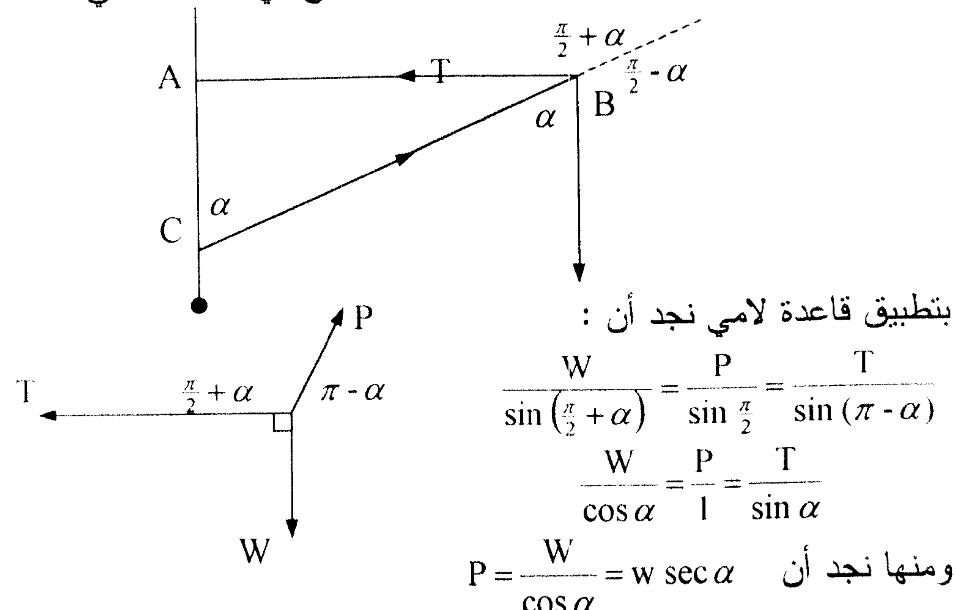
حيث زاوية COB زاوية مركزية وتساوي ضعف الزاوية المحيطة المشتركة معها في القوس

$\therefore\ R = W\ ,\ T = 2\,W\cos\theta$

مثال (٥) : القضيبان AB, CB مثبتان عند B وكذلك في حائط رأسي وكان AB أفقيا والنقطة C أسفل A علق الوزن W في النقطة B بإهمال أوزان القضبان أوجد الشد أو الضغط في كل منهما إذا كانت الزاوية ACB تساوي α .

الحل : عند إهمال أوزان القضبان فإن القوى المؤثرة عليها تكون في اتجاهها إما على صورة شد كالخيوط أو صورة ضغط. ولذلك فعند دراسة

اتزان النقطة B نجد أنها واقعة تحت تأثير الثلاث قوى الوزن W المعلق رأسياً والقوتين T, P في اتجاه القضبان كما واضح في الشكل التالي.



بتطبيق قاعدة لامي نجد أن :

$$\frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{P}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{T}{\sin(\pi-\alpha)}$$

$$\frac{W}{\cos\alpha}=\frac{P}{1}=\frac{T}{\sin\alpha}$$

ومنها نجد أن $P=\frac{W}{\cos\alpha}=w\sec\alpha$

كما أنه يمكن حلها بالتحليل في الرأسي والأفقي

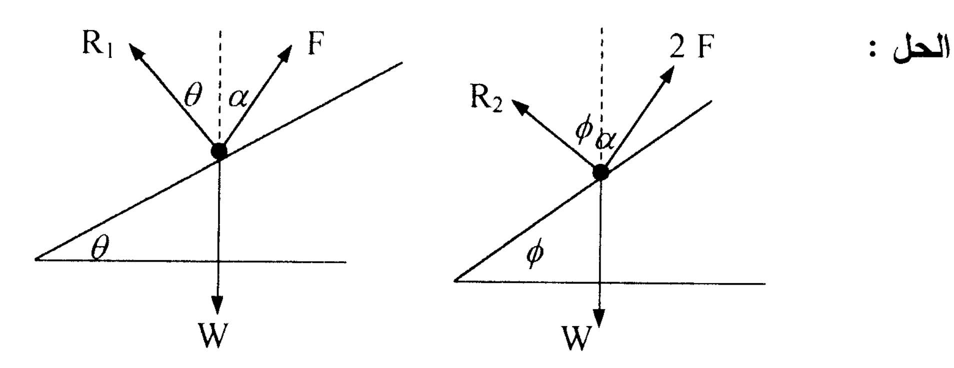
$$P\cos\alpha=W\Rightarrow\ P=\frac{W}{\cos\alpha}=\frac{W}{\cos\alpha}=W\sec\alpha$$

$$T=P\sin\alpha=\frac{W}{\cos\alpha}=\frac{W}{\cos\alpha}=W\tan\alpha$$

وأيضا يمكن حلها باستخدام مثلث القوى وهو المثلث ACB

مثال (٦) : وضع ثقل على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية θ وحفظ الثقل في وضع اتزان بواسطة قوة تميل على الرأسي بزاوية α وعندما زاد ميل المستوى مع الأفقي إلى الزاوية ϕ بحيث أن اتجاه القوة يظل ثابت ولكن قيمتها تتضاعف فإن الثقل يظل في حالة اتزان. أثبت أن الزاوية ϕ تعطى من $\cot\theta-\cot\alpha=2\cot\phi$

الحل :



نلاحظ أن الثقل في الحالتين سوف يتزن تحت تأثير ٣ قوى. نفرض في الحالة الأولى أن القوة F وتصنع زاوية α مع الرأسي، R_1 هو رد الفعل المؤثر على الثقل من المستوى، W هو وزن الثقل. أما في الحالة الثانية نفرض أن القوة 2 F، أن R_2 هو رد الفعل وأن α هي زاوية ميل القوة مع الرأسي لأنها لن تتغير في الاتجاه ونلاحظ أن R_1 , R_2 كل منهما عموديا على المستوى.

بالتحليل في الحالتين في الاتجاهين الأفقي والرأسي نجد في الحالة الأولى

$$R_1 \sin\theta = F \sin\alpha \qquad (1)$$

$$R_1 \cos\theta + F\cos\alpha = W \qquad (2)$$

في الحالة الثانية

$$R_2 \sin\phi = 2F\sin\alpha \qquad (3)$$

$$R_2 \cos\phi + 2F\cos\alpha = W \qquad (4)$$

بالتعويض عن R_1 من (1) في (2) نحصل على

$$F\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\cos\theta + F\cos\alpha = W \qquad (5)$$

بالتعويض عن R_2 من (3) في (4) نحصل على

$$2\,F\,\frac{\sin\alpha}{\sin\phi}\cos\phi + 2\,F\cos\alpha = W \qquad (6)$$

من (5), (6) نجد أن :

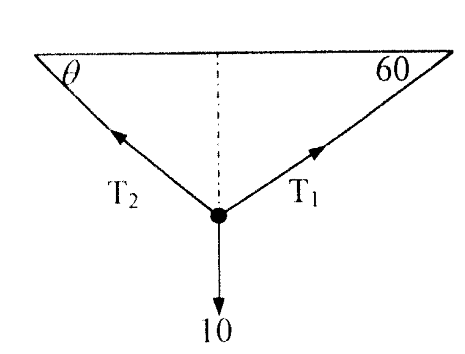
$$F\,\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\cos\theta + F\cos\alpha = 2\,F\,\frac{\sin\alpha}{\sin\phi}\cos\phi + 2\,F\cos\alpha$$

بالقسمة على $F\sin\alpha$ نحصل على

$$\cot\theta + \cot\alpha = 2\cot\phi + 2\cot\alpha$$

$$\therefore\ \cot\theta - \cot\alpha = 2\cot\phi$$

مثال (٧) : نقطة مادية تزن ١٠ ثقل باوند معلقة بواسطة خيطين. إذا كان اتجاه أحد الخيطين هو ٦٠° مع الأفقي. أوجد اتجاه الخيط الآخر حتى يكون الشد فيه أقل ما يمكن وأوجد قيمته.



الحل : نفرض أن الخيط الآخر يميل بزاوية θ مع الأفقي كما هو موضح بالرسم. ونفرض أن T_1 , T_2 هما الشدين في جزئي الخيطين وحيث أن النقطة المادية متزنة تحت تأثير ثلاثة قوى فإنه يمكن تطبيق قاعدة لامي عليها فنجد أن :

$$\frac{10}{\sin\left[180-(60+\theta)\right]} = \frac{T_1}{\sin\left[180-(90-\theta)\right]} = \frac{T_2}{\sin(180-30)}$$

$$\therefore\ \frac{10}{\sin(60+\theta)} = \frac{T_1}{\sin(90-\theta)} = \frac{T_2}{\sin 30}$$

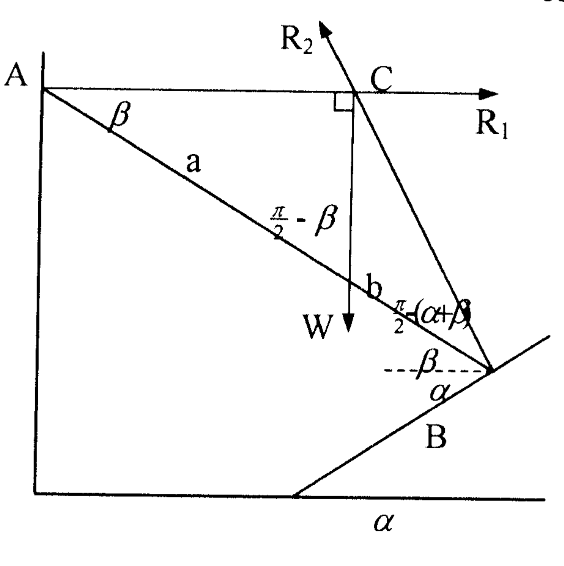
$$T_2 = \frac{10\sin 30}{\sin(60+\theta)} = \frac{10\left(\frac{1}{2}\right)}{\sin(60+\theta)} = \frac{5}{\sin(60+\theta)}$$

نلاحظ أن الشد T_2 يكون أقل ما يمكن عندما يكون المقام أكبر ما يمكن ولدينا أكبر قيمة للجيب هي الواحد الصحيح أي أنه يجب أن يكون $\sin(60+\theta)=1$ وتكون أقل قيمة للشد هي $T_2=5$ ويكون

$$\sin(60+\theta)=1 \Rightarrow 60+\theta=90 \Rightarrow \theta=30$$

بذلك نجد أن الشدين سيكونان متعامدين.

مثال (٨) : قضيب غير منتظم يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسي أملس والطرف الآخر على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية α . فإذا كان القضيب يميل على الأفقي بزاوية β . فاثبت أن مركز ثقل القضيب يقسمه بنسبة $\cos(\alpha+\beta) : \sin\alpha \sin\beta$



الحل : القضيب يتزن تحت تأثير ٣ قوى هي وزنه W رأسيا إلى أسفل ورد فعل الحائط R_1 عليه ورد فعل المستوى المائل R_2 عليه أيضا في هذه الحالة تتلاقى هذه القوى في نقطة واحدة ولتكن C بتطبيق العلاقة الثانية من (2.19) نجد أن :

$$a\cot\left[\tfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]-b\cot\beta=(a+b)\cot\left(\tfrac{\pi}{2}-\beta\right)$$

$$a\tan(\alpha+\beta)-b\cot\beta=(a+b)\tan\beta$$

$$a\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}-b\frac{\cot\beta}{\sin\beta}=(a+b)\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

بالضرب في $\sin\beta\cos\beta\ \cos(\alpha+\beta)$ نحصل على

$$a\sin\beta\cos\beta\ \sin(\alpha+\beta) - b^2\ \beta\cos(\alpha+\beta) =$$
$$(a+b)\ \sin^2\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$a\sin\beta\cos\beta\ \sin(\alpha+\beta) = (a+b)\sin^2\beta\cos(\alpha+\beta) +$$
$$+\ b\cos^2\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$a\sin\beta\cos\beta\ \sin(\alpha+\beta) = a\sin^2\beta\ \cos(\alpha+\beta) +$$
$$+\ b\cos(\alpha+\beta)(\sin^2\beta + \cos^2\beta)$$

$$a\sin\beta\cos\beta\ \sin(\alpha+\beta) - a\sin^2(\alpha+\beta) = b\cos(\alpha+\beta)$$

$$a\sin\beta[\cos\beta\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) - \sin\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)]$$
$$= b\cos(\alpha+\beta)$$

$$a\sin\beta[\sin\alpha\cos^2\beta\sin^2\beta] = b\cos(\alpha+\beta)$$

$$a\sin\beta\sin\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) = b\cos(\alpha+\beta)$$

$$a\sin\beta\sin\alpha = b\cos(\alpha+\beta)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$\therefore$ مركز ثقل القضيب يقسمه بنسبة $\cos(\alpha+\beta) : \sin\alpha\sin\beta$

تمارين

(١) محصلة القوتين $F_1 , 2F_1$ عمودية على F_1 . أوجد الزاوية بين القوتين.

(٢) مقدار محصلة القوتين F_1 , F_2 يساوي F_1 ومقـــدار محصلـــة القوتيـــن $2F_1 , F_2$ يساوي أيضا F_1 . أثبت أن المحصلة في الحالة الثانية تكـــون عمودية على القوة F_2 ثم أوجد مقدار واتجاه F_2 .

(٣) أوجد القوة التي تجعل محصلة المجموعة المستوية الآتية :

$F_1 (70,120^\circ), F_2(12,120^\circ), F_3(50,-60^\circ)$

تساوي $(100,45^\circ)$.

(٤) أوجد محصلة القوى 49 ,30 ,15 ,20 وزن كيلو جرام المؤثرة في النقط (6- ,2 ,3) ,(4 ,2 ,4-) ,(4 ,0 ,3) ,(0 ,2- ,0) على الترتيب والمتلاقية فـــي نقطة الأصل.

(٥) أوجد محصلة القوى الآتية :

أ ـــ قوة مقدارها 10 في اتجاه المتجه $\overline{j} , \overline{k}$

ب ـــ قوة مقدارها 15 وجيوب تمام اتجاهها (0.6 ,0.8- ,0)

جـــ ـــ القوة $3\overline{i} + 15\overline{j} - 3\overline{k}$

د ـــ قوة مقدارها 10 وتصنع الزوايا $135^\circ, -135^\circ, 90^\circ$ مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات x, y, z على الترتيب.

(٦) علق ثقل W بخيطين ثبت طرفيهما في نقطتين في مستوى أفقي واحـــد. أوجد الشد في كل منهما بدلالة زوايا الميل مـــــع الأفقـــي. ثـــم ادرس الحالات الخاصة : أ ـــ الميل متساوي ب ـــ الميل يساوي الصفر.

ثم أوجد التفسير للحالة الأخيرة.

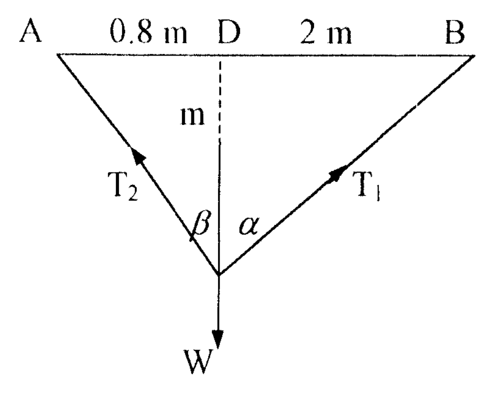
(٧) تستقر كتلة وزنها W على مستوى أملس مائل بزاوية α على الأفقي اتصلت الكتلة بخيط خفيف من أحد طرفيه ومر الطرف الآخر على بكرة ملساء واتصل به كتلة وزنها 'W. أوجد الزاوية التي يصنعها الخيط مع المستوى في حالة الاتزان. ابحث الحالة 'W = W.

(٨) علق قضيب خفيف طوله 10 ft. من نقطة ثابتة o بواسطة خيطين oA, oB طوليهما 12 ft., 8 ft. على الترتيب إذا ثبت عند A كتلة مقدارها 2 lbs وعند B كتلة مقدارها 3 lbs. أوجد الضغط في القضيب في وضع الاتزان.

(٩) جسم وزنه 100 kg علق بواسطة خيطين طول كل منهما 3 m , 4 m ثم ثبتت الأطراف الأخرى للخيطين بحيث كانا في مستوى أفقي واحد وعلى بعد 5 m. أوجد الشد في كل من الخيطين.

(١٠) خيط مثبت في نقطتين في نفس المستوى الأفقي. يمكن أن تنزلق عليه حلقة ملساء وزنها W جذبت بقوة أفقية فإذا كان جزئي الخيط في وضع الاتزان يميلان على الرأسي بزاوية $30^{\circ}, 60^{\circ}$. أوجد مقدار القوة والشد في الخيط.

(١١) أوجد الشدود المبينة بالشكل



(١٢) تنزلق خرزة على سلك دائري أملس في مستوى رأسي، متصلة بخيط خفيف مثبت في نقطة على المستقيم الرأسي الذي يمر بمركز الدائرة. أثبت أنه في وضع الاتزان يكون ضغط السلك على الخرزة لا تعتمد على طول الخيط.

(١٣) علق الوزن W بخيط من نقطة ثابتة وأزيح الخيط خارجاً بتأثير القوة $\overline{F}$ على هذا الوزن. أوجد اتجاه القوة حتى يكون ميل الخيط على الرأسي في حالة الاتزان أكبر ما يمكن ثم أوجد قيمة هذا الميل.

(١٤) عقدت ثلاث خيوط خفيفة وغير مرنة لتكون المثلث المتساوي الأضلاع ABC علق الثقل W من A واتزنت المجموعة في وضع كان فيه BC أفقياً بواسطة خيطين آخرين مربوطين أحدهما فيB والآخر في C ويصنع كل منهما 135^{o} مع BC. أوجد الشد في BC.

(١٥) وضع قضيب ثقيل داخل كرة مجوفة وكان مركز ثقله يقسمه بنسبة m : n فإذا كانت θ ميل القضيب على الأفقي في وضع الاتزان وكانت 2α هي الزاوية التي يصنعها القضيب مع مركز الكرة فأثبت أن $\tan\theta = \frac{n - m}{n + m}$. ثم أوجد ردي الفعل عند نهايتي القضيب.

عـــزم القوة :

١ـــ عزم القوة حول نقطة :

يعرف عزم القوة حول نقطة معينة بأنه مقياس ما تحدثه هذه القـــوة من دوران حول محور ماراً بالنقطة في اتجاه متجه العزم.

وكما يعرف بأنه حاصل الضرب الاتجاهي لمتجه موضع أي نقطـــة على خط عمل القوة بالنسبة للنقطة المعينة ومتجه القوة ويرمز له بـــالرمز $\overrightarrow{M}$

أي أنه إذا كـــانت القوة $\overrightarrow{F}$ تؤثـــر فـــي النقطة $P(r)$ حيث $\overrightarrow{r}$ متجه موضع نقطـــة تأثير القوة بالنسبة للنقطة المعينة o فـــأن عزم هذه القوة حول o يعطى من

$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F} \qquad (2.20)$$

$$= r\,F \sin(\hat{r, f})\,\overrightarrow{e}$$

حيث $\overrightarrow{e}$ متجه عمودي على المتجهين $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{r}$ ومقداره هو

$$M_o = r\,F \sin(\hat{r, F})$$

من الرسم نجد أن $h = r \sin(\hat{r, F})$ وهو طول العمود الساقط من النقطـــة o على خط عمل القوة ويسمى بذراع القوة

$$\therefore\ M_o = F\,h$$

أي أن مقدار العزم يساوي القوة × ذراعها.

وكما نعلم من تعريف الضرب الاتجاهي فإن متجه العزم $\overrightarrow{M_o}$ يكون عموديا على مستوى القوى $\overrightarrow{F}$ ومارا بالنقطة o في الجـــانب المرتبـــط بمجموعـــة الإسناد ومقداره يساوي حاصل ضرب مقدار القوة في طول العمود النـــازل من النقطة o على خط عمل القوة.

ولكن متجه القوة متجه منزلق نقل نقطة تأثيرها $P(r)$ إلى أي نقطة أخـــرى $P_1(r_1)$ على خط عملها وعندئذ من الرسم من المثلث oPP_1 نجد أن

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{r_1} + \lambda\,\overrightarrow{F}$$

حيث λ أي عدد قياسي.

بالتعويض في (2.20) نحصل على

$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{r_1} + \lambda\,\overrightarrow{F}\right) \wedge \overrightarrow{F}$$

$$= \overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{F} + \lambda\,\overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{F}$$

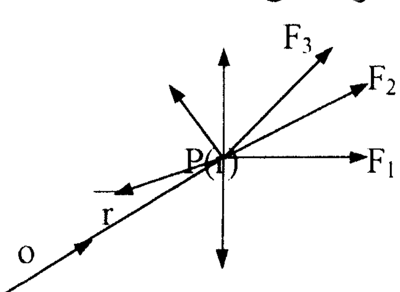
$$\therefore\ \overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{F} \qquad (2.21)$$

أي أن متجه العزم لا يتغير مهما تغيرت نقطة تأثير القوة بحيث تكون علـــى خط عملها.

نظرية فارجون :

مجموع عزوم أي مجموعة من القوى المتلاقيـــة حـــول أي نقطـــة يساوي عزم محصلتهم (مجموعهم الاتجاهي) حول نفس النقطة.

البرهان : نفرض أن مجموعة القوى $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \ldots, \overrightarrow{F_n}$ متلاقية فـــي النقطة $P(r)$ فإن مجموع العزوم لهذه المجموعة حول النقطة o يعطى من



$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \overrightarrow{P_1P} = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{F}$$

$$= \vec{r} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n)$$

$$= \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad (2.22)$$

حيث $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n$ هي محصلة مجموعة القوى.

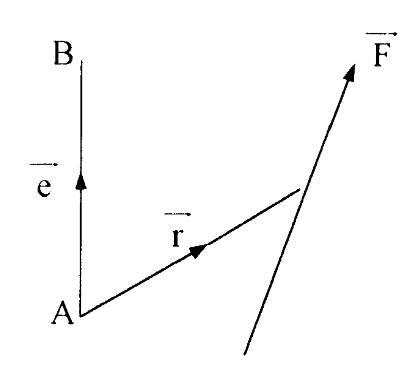
٢ـ عزم القوة حول محور :

إذا ثبت من الجسم المتماسك نقطة واحدة (مفصلة كرية) فإن الحركة الممكنة للجسم تكون دورانية بحتة حول هذه النقطة، ففي هذه الحالة نجد أن عزوم القوى المؤثرة على هذا الجسم حول نقطة التثبيت تعمل على دوران حور محاور مختلفة تمر بالنقطة الثابتة.

أما إذا ثبت من الجسم نقطتين (باب) فإن الحركة الممكنة في هذه الحالة تكون دورانية بحتة أيضا حول محور ثابت هو المستقيم الواصل بين نقطتي التثبيت حيث أنه في هذه الحالة نجد أن مركبات القوى في اتجاه هذا المحور لا تستطيع إحداث أي حركة انتقالية أو دورانية ولكن تتعادل مع ردود الأفعال عند نقط التثبيت أما ما يحدث الدوران فهي المركبات العمودية على هذا المحور.

من ذلك يمكن تعريف عزم القوى حول محور بأنه مقياس لما تحدثه القوة من دوران حول المحور أو بأنه حاصل ضرب مركبة القوة في الاتجاه العمودي على المحور في أقصر مسافة بينهما وفي اتجاه المحور.

ويمكن توضيح كيفية إيجاد عزم القوة $\vec{F}$ حول محور (مستقيم) AB وذلك باتباع الخطوات الآتية :



(i) نوجد عزم القوة $\overrightarrow{F}$ حول نقطـــــة تمر بالمحور ولتكن A وتعطى من

$$\overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$$

(ii) نوجد متجه $\overrightarrow{e}$ في اتجـــاه المحـــور ويعطى من

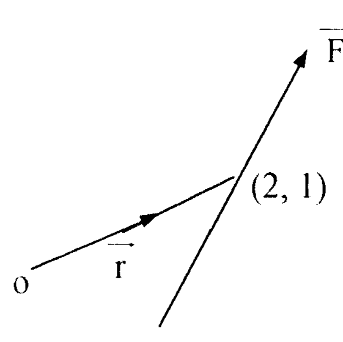
$$\overrightarrow{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

(iii) بضرب الخطوتين السابقتين قياسيا فإننا نحصل على عـــزم القـــوة $\overrightarrow{F}$ حول المحور المطلوب ويعطى من

$$\overrightarrow{M}_e = (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{M}_o)\,\overrightarrow{e} \qquad (2.23)$$

أمثلة

مثال (١) : أوجد عزم القوة $\overrightarrow{F} = 5\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$ المارة بالنقطـــة (2, 1) حـــول نقطة الأصل.



الحل :

$$\overrightarrow{r} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{F} = 5\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$$

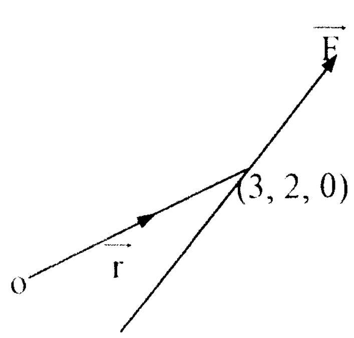
عزم القوة $\overrightarrow{F}$ حول نقطة الأصل o يعطى من

$$\overrightarrow{M}_o = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_o} = 5\,\overrightarrow{k}$$

أي أن العزم في الاتجاه الموجب لمحور z ومقداره 5.

مثال (٢) : إذا كانت $\overrightarrow{F} = 2\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j} + 4\,\overrightarrow{k}$ تؤثر في النقطة (3, 2, 0) أوجد عزم القوة حول نقطة الأصل.



الحل : $\overrightarrow{r} = 3\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$

$$\overrightarrow{F} = 2\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j} + 4\,\overrightarrow{k}$$

عزم القوة $\overrightarrow{F}$ حول نقطة الأصل o يعطى من

$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 8\,\overrightarrow{i} - 12\,\overrightarrow{j} + 5\,\overrightarrow{k}$$

مقدار العزم يعطى من

$$\left| \overrightarrow{M_o} \right| = \sqrt{(8)^2 + (-12)^2\ (5)^2} = \sqrt{233}$$

ويصنع زوايا مع محاور الإحداثيات تعطى من

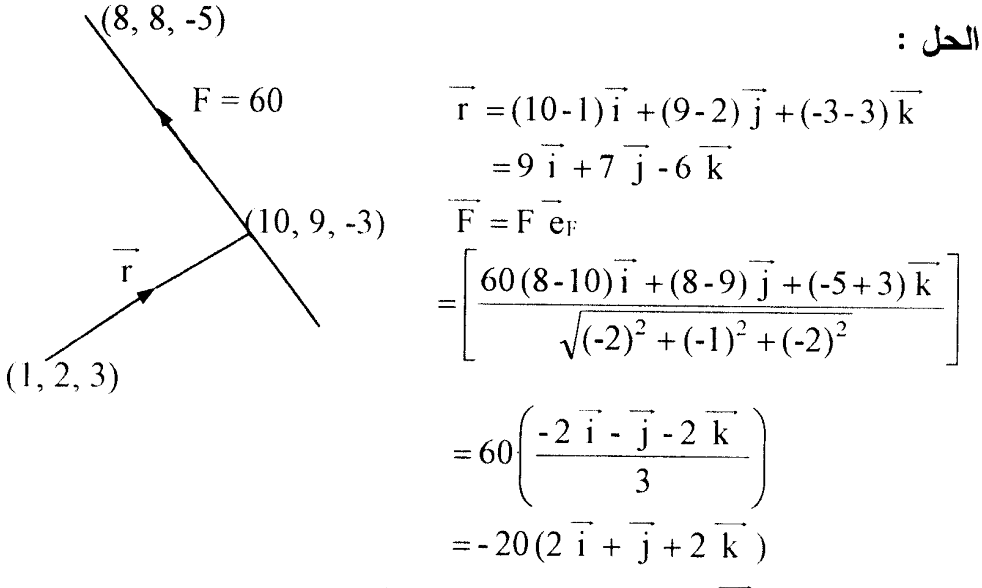
$$\cos(\hat{M}, x) = \frac{M_x}{M} = \frac{8}{\sqrt{233}}$$

$$\cos(\hat{M}, y) = \frac{M_y}{M} = \frac{-12}{\sqrt{233}}$$

$$\cos(\hat{M}, z) = \frac{M_z}{M} = \frac{5}{\sqrt{233}}$$

مثال (٣) : قوة مقدارها 60 تمر بالنقطتين (8, 8, -5), (10, 9, -3). أوجد عزم هذه القوة حول النقطة (1, 2, 3).

الحل :



$$\overrightarrow{r} = (10-1)\overrightarrow{i} + (9-2)\overrightarrow{j} + (-3-3)\overrightarrow{k}$$

$$= 9\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{F} = F\,\overrightarrow{e}_F$$

$$= \left[\frac{60(8-10)\overrightarrow{i} + (8-9)\overrightarrow{j} + (-5+3)\overrightarrow{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}\right]$$

$$= 60\left(\frac{-2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}}{3}\right)$$

$$= -20(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k})$$

$\therefore$ عزم القوة $\overrightarrow{F}$ حول النقطة $(1, 2, 3)$ يعطى من

$$\overrightarrow{M}_{(1,2,3)} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$$

$$= -20\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 9 & 7 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -20(20\overrightarrow{i} - 30\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k})$$

$$= -100(4\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$$

مقدار العزم يعطى من

$$|\overrightarrow{M}| = 100\sqrt{(4)^2 + (-6)^2 + (-1)^2}$$

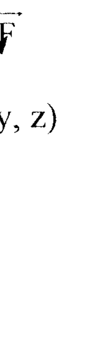
وجيوب تمام اتجاهه مع محاور الإحداثيات هي

$$\cos(\hat{M, x}) = \frac{M_x}{M} = -\frac{400}{100\sqrt{53}} = -\frac{4}{\sqrt{53}}$$

$$\cos(\hat{M, y}) = \frac{M_y}{M} = \frac{600}{100\sqrt{53}} = \frac{6}{\sqrt{53}}$$

$$\cos(\hat{M, z}) = \frac{M_z}{M} = \frac{100}{100\sqrt{53}} = \frac{1}{\sqrt{53}}$$

مثال (٤) : أوجد عزم القوة $\overrightarrow{F} = F_1\,\overrightarrow{i} + F_2\,\overrightarrow{j} + F_3\,\overrightarrow{k}$ التي تمر بالنقطة (x, y, z) حول محاور الإحداثيات.



الحل :

$$\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{F} = F_1\,\overrightarrow{i} + F_2\,\overrightarrow{j} + F_3\,\overrightarrow{k}$$

عزم القوة حول نقطة تمر بمحاور الإحداثيات وهي o تعطى من

$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x & y & z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= (y\,F_3 - 3\,F_2)\,\overrightarrow{i} + (z\,F_1 - x\,F_3)\,\overrightarrow{j} + (x\,F_2 - y\,F_1)\,\overrightarrow{k}$$

∴ عزم القوة $\overrightarrow{F}$ حول محاور الإحداثيات تعطى من

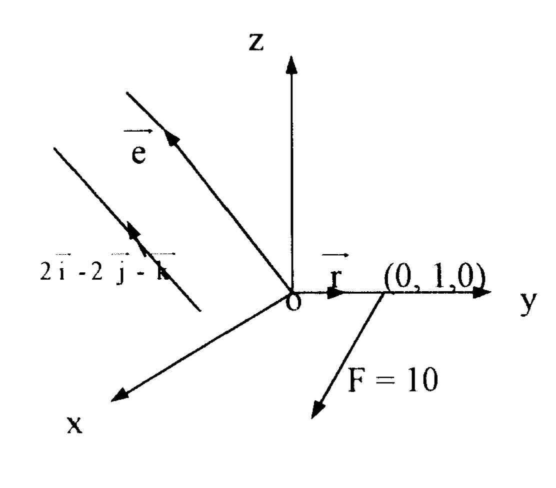
$$M_x = \overrightarrow{i}\,.\,\overrightarrow{M_o} = y\,.\,F_3 - z\,F_2$$

$$M_y = \overrightarrow{j}\,.\,\overrightarrow{M_o} = z\,.\,F_1 - x\,F_3$$

$$M_z = \overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{M_o} = x\,.\,F_2 - y\,F_1$$

مثال (٥) : قوة مقدارها 10 توازي الاتجاه الموجب لمحور x وتمر بالنقطة $(0, 1, 0)$ أوجد عزم هذه القوة حول محور يمر بنقطة الأصل ويوازي المتجه $2\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$

الحل :



$\vec{r} = \vec{j}$

$\vec{F} = 10\,\vec{i}$

عزم القوة حول نقطة تمر بالمحور

وهو نقطة الأصل o

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -10\,\vec{k}$$

متجه وحدة في اتجاه المحور المطلوب هو

$$\vec{e} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}}{3}$$

$\therefore$ عزم القوة $\vec{F}$ حول المحور هو

$$\vec{M}_e = (\vec{e} \cdot \vec{M}_o)\,\vec{e}$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}(2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot (-10\,\vec{k})\right]\vec{e}$$

$$= \tfrac{10}{3}\,\vec{e}$$

تمارين

(١) أوجد عزم محصلة مجموعة القوى المستوية (في المستوى x y) الآتية حول كل من نقطة الأصل والنقطة (3, 0)

(أ) $(10, 30^o)$ وتؤثر في النقطة (1, 0)

(ب) $(10, -60^o)$ وتؤثر في النقطة (0, -2)

(جـ) $(10, 120^o)$ وتؤثر في النقطة (0, -4)

(٢) أوجد عزم القوة $\overrightarrow{F} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ المارة بالنقطة (3, 2, 9) حول :

(أ) نقطة الأصل (ب) محاور الإحداثيات.

(جـ) المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (1, 1, 1)

(د) المستقيم المار بالنقطتين (1, 0, 0) , (0, 0, 1)

(٣) قوة مقدارها 100 تؤثر في النقطة (3, -6, 9) فإذا كانت جيوب تمام اتجاه القوة هي 0.667- ,0.333- , 0.667. أوجد عزم هذه القوة حول المستقيم الذي يصل نقطة الأصل بالنقطة (6, -8, 0).

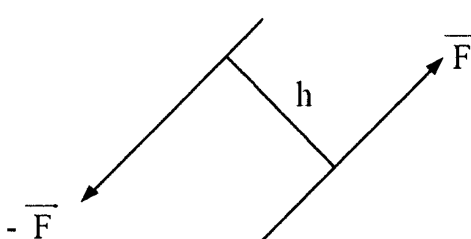
(٤) قوة مقدارها 100 تؤثر في المستقيم الواصل من النقطة (0, 1, 0) إلى النقطة (1, 0, 0) أوجد عزم هذه القوة حول نقطة الأصل وكذلك محاور الإحداثيات.

(٥) أوجد عزم القوة $10\overrightarrow{i} - 15\overrightarrow{k}$ المارة بالنقطة (5, 1, 2) حول المحور المار بالنقطة (2, 1, -3) وجيوب تمام اتجاهه هي 0.5, -0.5, 0.707.

مجموعات القوى غير المتلاقية :

الازدواج :

يعرف بأنه قوتين متساويتان في المقدار ومتضادتين في الاتجاه وخط عملهما ليس على استقامة واحدة ويقاس الازدواج بما يعرف بعزمه ومقدار هذا العزم هو حاصل ضرب أحد القوتين × البعد العمودي بينهما وهذا الأخير يسمى بذراع الازدواج.

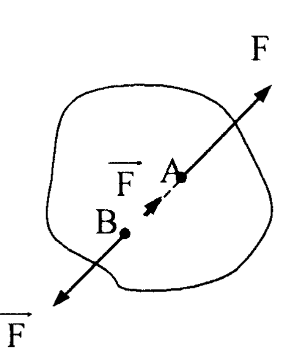


نظرية : عزم قوتي الازدواج حول أي نقطة في مستويهم يساوي مقدار ثابت هو نفسه عزم الازدواج.

ويمكن برهنة هذه النظرية بسهولة.

نقل نقطة تأثير القوة :

١ــ نقل نقطة تأثير القوة إلى نقطة على نفس عملها :



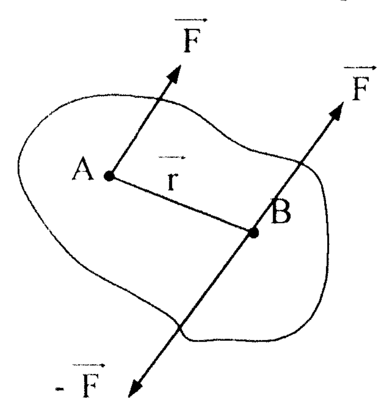
نفرض أن $\overrightarrow{F}$ هي القوة وتؤثر عند A من الجسم نفرض B نقطة أخرى على نفس خط عمل $\overrightarrow{F}$ (أو امتداده).

لذلك نؤثر عند B بقوتين $\overrightarrow{F}, -\overrightarrow{F}$ متساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه بذلك نحصل على قوة $\overrightarrow{F}$ عند B وقوتين على نفس خط العمل $\overrightarrow{F}$

عند A، $\overrightarrow{F}$ - عند B الذي لهم نفس خط العمل ومتضـــادتين فـــي الاتجـــاه ومتساويتين بذلك يلاشى كل منهم الآخر ولا يظهر تأثير على الجسم منـــهما وتؤول المجموعة بذلك إلى $\overrightarrow{F}$ عند B فقط.

∴ أمكن نقل نقطة تأثير القوة $\overrightarrow{F}$ إلى نقطة أخرى على نفس خط عملـــها بقوة أخرى مساوية لها $\overrightarrow{F}$.

٢ــ نقل نقطة تأثير القوة إلى نقطة ليست على نفس خط عملها :



نفرض أن $\overrightarrow{F}$ هي القوة وتؤثر عنـــد A من الجسم، نفرض أن B نقطة أخـــرى ليست على خط عمل $\overrightarrow{F}$.

لذلك نؤثر عند B بقوتين $\overrightarrow{F}$, - $\overrightarrow{F}$ متساويتان في المقدار ومتضـــادتين فـــي الاتجاه بذلك يمكن أن يكون لدينا الآتي :

قوة $\overrightarrow{F}$ عند B وقوتين $\overrightarrow{F}$, - $\overrightarrow{F}$ عند كل من A, B واللذان يكونـــان ازدواج بذلك فإن القوة $\overrightarrow{F}$ عند A تكافئ عند B قوة $\overrightarrow{F}$ بالإضافة إلى ازدواج نـــاتج من القوتين $\overrightarrow{F}$, - $\overrightarrow{F}$ وعزمه يساوي عزم القوة F عند A حول B ويعطـــى من

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$$

حيث $\overrightarrow{r}$ متجه موضع A بالنسبة إلى B.

وبذلك فإن أي مجموعة من القوى الموزعة توزيعا اختياريا في الفراغ يمكن اختزالها إلى نفس المجموعة المتلاقية في نقطة اختيارية (يمكن اختزالها كما

سبق إلى قوة واحدة) مضافا إليها ازدواجا عزمـــه يســاوي عــزم قــوى المجموعة الأولى حول النقطة الاختيارية.

عموما إذا كان لدينا مجموعة القوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$ فإنه بالنسبة إلى أي نقطة o بفرض أن $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ..., \vec{r}_n$ متجهات مواضع نقط تأثيرهــا المجموعة بالنسبة للمركز o فإن المجموعة تختزل عند المركز o إلى قوة $\vec{F}$ وازدواج $\vec{M}$ بحيث يكون

$$\vec{F} = \sum_{m=1}^{n} \vec{F}_m \quad , \quad \vec{M} = \sum_{m=1}^{n} \vec{r}_m \wedge \vec{F}_m \qquad (2.24)$$

المتجهان $\vec{F}, \vec{M}$ يسميان بمتجهي القوة والعزم الرئيسين للمجموعة.

شروط الاتزان :

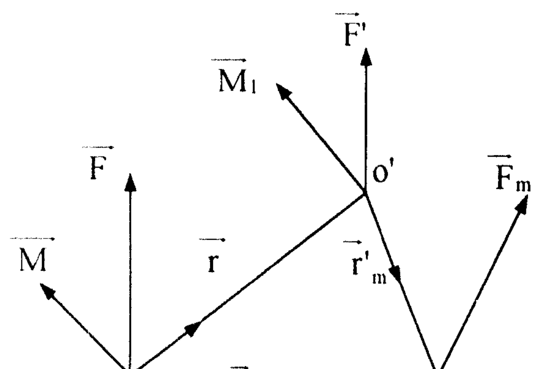
حيث أن مجموعة القوى $\vec{F}_m \ (m=1,3,...,n)$ الموزعة توزيعا اختياريا فــي الفراغ تختزل بالنســـبة لبدايـــة الإحداثيـــات إلـــى المتجـــهين الرئيســـين $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3), \ \vec{M} = (M_1, M_2, M_3)$. فإن الشرط الضروري والكـــافي لاتزان هذه المجموعة هو $\vec{F} = \vec{O} \ , \ \vec{M} = \vec{O}$

والذي يكافئ معادلات قياسية تأخذ الصورة

$$F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$$
$$M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = 0$$

أي أن مجموع مركبات قوى المجموعة في اتجاه كل من أي ثلاث محـــاور متعامدة يساوي الصفر. وكذلك عزوم قوى المجموعة حول كل من نفـــس الثلاث محاور يساوي الصفر يمثل الشرط الضروري والكافي للاتزان.

تغير مركز المجموعة :



مجموعة القوى $\vec{F}_m \ (m = 1,2,\ldots,n)$ المؤثرة في النقط A_m ومتجهات مواضعها $\vec{r}_m$ بالنسبة للمركز o تختزل عند المركز o إلى قوة $\vec{F}$ وازدواج $\vec{M}$ يعطيان من

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= \sum_{m=1}^{n} F_m \\ \vec{M} &= \sum_{m=1}^{n} \vec{r}_m \wedge \vec{F}_m \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

نفرض أن o' مركز جديد متجه موضعه بالنسبة للمركز o هو $\vec{r}$ فان مجموعة القوى تختزل عند المركز o' إلى قوة $\vec{F}'$ وازدواج $\vec{M}'$ يعطيان من

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}' &= \sum_{m=1}^{n} F_m = \vec{F} \\ \vec{M}' &= \sum_{m=1}^{n} \vec{r}'_m \wedge \vec{F}_m \end{aligned}\right\} \qquad (2.26)$$

حيث $\vec{r}'_m$ متجهات مواضع نقط تأثير القوى $\vec{F}_m$ بالنسبة للمركز o'

من الرسم نجد أن :

$$\vec{r}_m = \vec{r} + \vec{r}'_m \Rightarrow \vec{r}'_m = \vec{r}_m - \vec{r}$$

بالتعويض عن $\vec{r}'_m$ في (2.26) نحصل على

$$\vec{M}' = \sum_{m=1}^{n} (\vec{r}_m - \vec{r}) \wedge \vec{F}_m$$

$$\overrightarrow{M'} = \sum_{m=1}^{n} \vec{r}_m \wedge \vec{F}_m - \vec{r} \wedge \sum_{n=1}^{n} \vec{F}_m$$

بالتعويض من (2.25) نحصل على

$$\overrightarrow{M'} = \overrightarrow{M} - \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{2.27}$$

من ذلك يتضح أن متجه القوة الرئيسي لا يتغير من مركز إلى آخر بينما يتغير متجه العزم الرئيسي من أحدهما للآخر بمقدار عزم متجه القوة الرئيسي عند أحدهما حول الآخر فإذا كان متجه القوة الرئيسي يساوي صفر فان المجموعة تؤول إلى ازدواج لا يعتمد على المركز ($\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M'}$) هذه النتيجة تجعلنا نفكر في البحث عن مركز 'o مثلاً يمكن اختزال المجموعة عنده إلى قوة فقط أي أن

$$\overrightarrow{M'} = \overrightarrow{M} - \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{O}$$

ومنها نجد أن

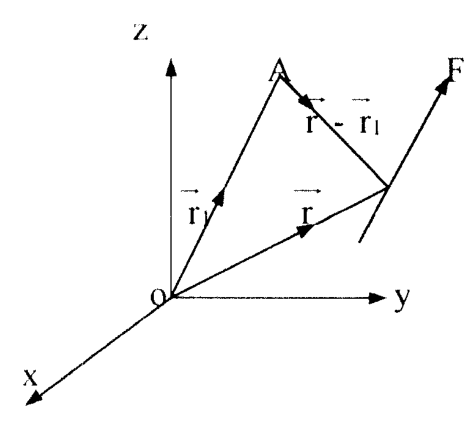
$$\overrightarrow{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{2.28}$$

واضح أن هذه العلاقة لا تتحقق إلا إذا كان المتجهان الرئيسيان $\vec{F}, \overrightarrow{M}$ متعامدين وعندئذ فإنها لجميع قيم $\vec{r}$ تمثل معادلة خط مستقيم هو خط عمل القوة التي آلت إليها المجموعة ولذلك تعرف المعادلة (2.28) إذا تحقق $\vec{F} \cdot \overrightarrow{M} = 0$ بمعادلة خط عمل المحصلة ويمكن كتابتها في الصورة القياسية (شرط توازي المتجهين أي تناسب مركباتهما)

$$\frac{y F_z - z F_y}{M_x} = \frac{z F_x - x F_x}{M_y} = \frac{x F_y - y F_x}{M_z} \tag{2.29}$$

وهي تعتبر في هذه الحالة تطبيقاً لنظرية فارجنون. حيث أنه عندما تؤول مجموعة من القوى إلى قوة واحدة فإن مجموع عزوم القوى لهذه المجموعة $\overrightarrow{M_A}$ حول أي نقطة $A(r_1)$ يساوي عزم محصلتهم $\overrightarrow{F}$ التي آلت إليها هذه المجموعة حول نفس النقطة أي أن :

$$\overrightarrow{M_A} = (\vec{r} - \vec{r_1}) \wedge \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (2.28)$$



حيث $\vec{r}$ متجه موضع نقطة على خط عمل المحصلة كما في الشكل وفي الواقع فان المعادلة (2.28) حالة خاصة من هذه الحالة عندما $r_1 = 0$

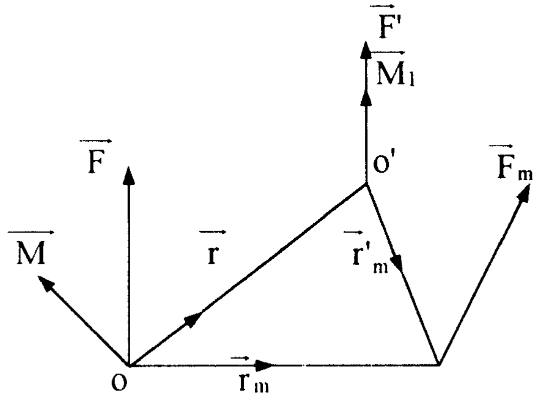
لا تغيري الانتقال :

الكميات التي لا تتغير بتغير مركز المجموعة تسمى بالكميات اللاتغيرية بالنسبة لهذا المركز مثل متجه القوة الرئيسي للمجموعة كما سبق ذكره $\vec{r} - \vec{r_1}$

اللولبية :

إذا انطبق اتجاه متجه العزم الرئيسي لمجموعة من القوى مع اتجاه متجه القوة الرئيسي لنفس المجموعة سميت باللولبية والخط الذي انطبق عليه اتجاههما سمي محور هذه اللولبية (المحور المركزي)

أي أن اللولبية عبارة عـــن قـــوة وازدواج في اتجاه واحـــد كمـــا بالشكل ولاختزال المجموعة إلـــى لولبية نجـــد أن شـــرط انطبـــاق (تـــوازي) اتجـــاهي المتجـــهين الرئيسين هو



$$\overrightarrow{M} = \lambda\ \overrightarrow{F}$$

$$\because\ \overrightarrow{M'} = \overrightarrow{M} - \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{M} - \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F} = \lambda\ \overrightarrow{F} \qquad (2.30)$$

حيث λ أي عدد قياسي يميز اللولبية عن الأخرى ولذا فيسمى بـــارامتر أو خطوة اللولبية.

بضرب المعادلة (2.30) قياسياً في $\overrightarrow{F}$ نحصل على

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{M} - \overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}) = \lambda\ \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{F}$$

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{M} = \lambda\ F^2$$

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{M}}{F^2} \qquad (2.31)$$

لإيجاد معادلة محور اللولبية (المحور المركزي) :

بضرب المعادلة (2.30) اتجاهياً من جهة اليسار في $\overrightarrow{F}$ نحصل على

$$\overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{M} - \overrightarrow{F} \wedge (\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}) = \lambda\ (\overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{F})$$

$$\overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{M} - [(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{F})\ \overrightarrow{r} - (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{r})\ \overrightarrow{F}] = \overrightarrow{O}$$

$$\overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{M} - F^2\ \overrightarrow{r} + (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{r})\ \overrightarrow{F} = \overrightarrow{O}$$

$$\overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{M} + (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{r})\ \overrightarrow{F} = F^2\ \overrightarrow{r}$$

$$\therefore\ \vec{r} = \frac{\vec{F} \wedge \vec{M}}{F^2} + \frac{\vec{F} . \vec{r}}{F^2}\ \vec{F}$$

$$\therefore\ \vec{r} = \vec{r}_o + \mu\ \vec{F} \qquad (2.32)$$

حيث $\vec{r}_o = \dfrac{\vec{F} \wedge \vec{M}}{F^2}$ متجه ثابت، $\mu = \dfrac{\vec{r} . \vec{F}}{F^2}$ بارامتر.

وبذلك فإن (2.32) تمثل معادلة خط مستقيم في اتجاه $\vec{F}$ ويمر بنهاية المتجه $\vec{r}_o$ ولذلك فهو يمثل معادلة محور اللولبية (المحور المركزي) وهي الصورة الاتجاهية لمعادلة اللولبية.

ويمكن كتابة (2.32) في الصورة :

$$x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = x_o\,\vec{i} + y_o\,\vec{j} + z_o\,\vec{k} + \mu(F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k})$$

ويمكن وضعها في الصورة (شرط توازي المتجهين $\vec{r} - \vec{r}_o, \vec{F}$)

$$\frac{x - x_o}{F_x} = \frac{y - y_o}{F_y} = \frac{z - z_o}{F_z} = \mu \qquad (2.33)$$

وهي الصورة القياسية لمعادلة محور اللولبية (المحور المركزي).

مما سبق يمكن ملاحظة ما يأتي :

١ـ عندما $\vec{F} . \vec{M} \neq 0$ فان المجموعة يمكن اختزالها إلى لولبية خطوتها تتحدد من العلاقة (2.31) أو إلى قوتين في مستويين مختلفين.

٢ـ عندما $\vec{F} . \vec{M} = 0$ فإننا نجد الحالات الآتية :

(i) $\vec{F} = \vec{O}, \vec{M} \neq \vec{O}$ المجموعة آلت إلى ازدواج ثابت لا يتوقف على المركز

(ii) $\vec{F} = \vec{O}, \vec{M} = \vec{O}$ المجموعة متزنة.

(iii) $\vec{F} \neq \vec{O}, \vec{M} = \vec{O}$ المجموعة تؤول إلى متجه القوة الرئيسي

$$\vec{F} = \sum_{m=1}^{n} \vec{F}_m$$

كما يلاحظ أيضاً أنه إذا آلت المجموعة إلى قوة واحدة فإنه بالنسبة لهذه المجموعة يكون $\vec{F} \neq \vec{O}\ ,\ \vec{F}\,.\,\vec{M} = 0$

وبذلك فإن الشرط الضروري والكافي لاختزال أي مجموعة من القوى إلى قوة واحدة هو $\vec{F} \neq \vec{O}\ ,\ \vec{F}\,.\,\vec{M} = 0$ حيث $\vec{F}\ ,\ \vec{M}$ متجهي القوة والعزم الرئيسين لهذه المجموعة.

حالة خاصة : القوى المستوية (تقع كلها في مستوى واحد)

نفرض مجموعة القوى $\vec{F}_m$ $(m = 1,2,3....,n)$ تقع في المستوى xy ومتجهات مواضع نقط تأثيرها $\vec{r}_m$ فإن

$$\vec{F}_m = F_{mx}\ \vec{i} + F_{my}\ \vec{j}$$
$$\vec{r}_m = x_m\ \vec{i} + y_m\ \vec{j}$$

وبذلك فإن المجموعة تختزل عند بداية الإحداثيات إلى المتجهين الرئيسين

$$\vec{F} = \sum_{m=1}^{n} \vec{F}_m = \sum_{m=1}^{n} \vec{F}_{mx}\,\vec{i} + \sum_{m=1}^{n} \vec{F}_{my}\,\vec{j}$$

$$= F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j}$$

$$\vec{M}_o = \sum_{m=1}^{n} \vec{r}_m \wedge \vec{F}_m = \sum_{m=1}^{n} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_m & y_m & z_m \\ F_{mx} & F_{my} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \left(x_m\,F_{my} - y_m\,F_{mx}\right)\vec{k}$$

من ذلك نرى أن $\vec{F} \,.\, \vec{M} = 0$ وبذلك فإن مثل هذه المجموعة يمكن أن تختزل إلى متجه القوة الرئيسي $\vec{F}$ فقط وعندئذ فإن المعادلات (2.28), (2.29) تمثل معادلة خط عمل هذه المحصلة والتي تأخذ في هذه الحالة الصورة

$$M_o = x\,F_y - y\,F_x = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$

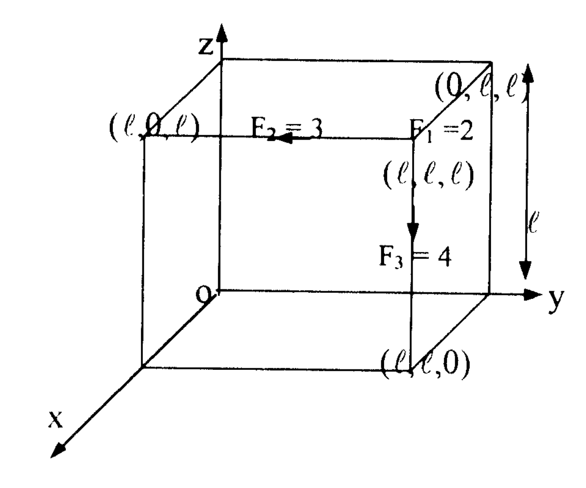
وبنفس الطريقة فإن مجموع عزوم القوى حول نقطة (x_1, y_1) يساوي عزم محصلتهما حول نفس النقطة وبذلك نحصل في الحالة العامة على

$$M_{(x_1, y_1)} = (x - x_1)\,F_y - (y - y_1)\,F_x$$

$$= \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$

أمثلة

مثال (١) : ثلاث قوى مقاديرها 2, 3, 4 تؤثر في أحد أركان مكعب وفي اتجاه أحرفه اختزل هذه المجموعة عند الركن المقابل.



الحل : نفرض ℓ طول ضلع المكعب

$\vec{F}_1 = -2\,\vec{i}\,,(\ell,\ell,\ell)$

$\vec{F}_2 = -3\,\vec{j}\,,(\ell,\ell,\ell)$

$\vec{F}_3 = -4\,\vec{k}\,,(\ell,\ell,\ell)$

متجه القوة الرئيسي (المحصلة)

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$$

متجه العزم الرئيسي

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \ell & \ell & \ell \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \ell & \ell & \ell \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \ell & \ell & \ell \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -2\ell\,\vec{j} + 2\ell\,\vec{k} + 3\ell\,\vec{i} \,--3\ell\,\vec{k} - 4\ell\,\vec{i} + 4\ell\,\vec{j}$$

$$= -\ell\,\vec{i} + 2\ell\,\vec{j} - \ell\,\vec{k}$$

$$= \ell\,(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\,)$$

مثال (٢) : تؤثر القوة $\vec{F}_1 \equiv (2,1,-3)$ عند النقطة $(2, 3, 1)$ والقوة $\vec{F}_2 \equiv (3,1,-1)$ عند النقطة $(4, 6, -3)$ والقوة $\vec{F}_3 \equiv (-2,3,4)$ عند النقطة $(-1, 1, 0)$. أوجد القوة والازدواج المكافئين لهذه المجموعة عند النقطة $(1,4,2)$.

الحل : نوجد متجهات موضع نقط على القوى بالنسبة إلى النقطة المأخوذ حولها العزم ولنفرض هي

$$\vec{r}_1 \equiv (2, 3, 1) - (1, 4, 2) \equiv (1, -1, -1)$$

$$\vec{r}_2 \equiv (4, 6, -3) - (1, 4, 2) \equiv (3, 2, -5)$$
$$\vec{r}_3 \equiv (-1, 1, 0) - (1, 4, 2) \equiv (-2, -3, -2)$$

فتكون المجموعة تكافئ قوة واحدة $\vec{F}$ عند النقطة $(1, 4, 2)$ وهو متجه القوة الرئيسي وعزم $\vec{M}$ يعطيان من

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} + 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} - 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$
$$= 3\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= \vec{i} + \vec{j} - 12\vec{k}$$

مثال (٣) : تؤثر القوتان $\vec{F}_1 \equiv (0,0,1)$, $\vec{F}_2 \equiv (0,1,0)$ وزن كيلو جرام في النقطتين $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$ متر على الترتيب. أوجد خطوة اللولبية التي تؤول إليها المجموعة ومعادلة محورها.

الحل :

$$\vec{F}_1 = \vec{k} \;\; ,(0,0,0)$$
$$\vec{F}_2 = \vec{j} \; , \; (3,0,0)$$

متجه القوة الرئيسي (المحصلة)

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$
$$= \vec{j} + \vec{k}$$
$$F^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2$$

متجه العزم الرئيسي

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2$$

$$\overrightarrow{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\,\vec{k}$$

خطوة اللولبية

$$\lambda = \frac{\vec{F}\cdot\overrightarrow{M}}{F^2} = \frac{(1)(3)}{2} = \frac{3}{2}$$

معادلة محور اللولبية :

(أ) الصورة الاتجاهية

$$\vec{r} = \vec{r}_o \wedge \mu\,\vec{F}$$

حيث

$$\vec{r}_o = \frac{\vec{F}\wedge\overrightarrow{M}}{F^2} \qquad (*)$$

$$\vec{F}\wedge\overrightarrow{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

بالتعويض في (*) نحصل على

$$\vec{r} = \frac{3\,\vec{i}}{2} \equiv \left(\tfrac{3}{2}, 0, 0\right)$$

$$\equiv (x_o, y_o, z_o)$$

(ب) الصورة القياسية :

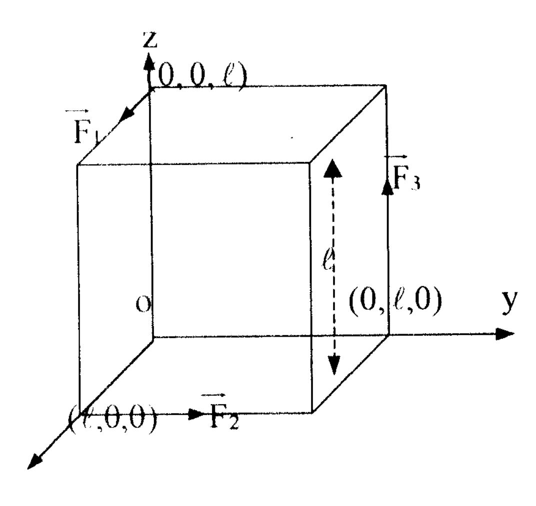
$$\frac{x - x_o}{F_x} = \frac{y - y_o}{F_y} = \frac{z - z_o}{F_z}$$

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{0} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 0}{1}$$

ومنها نجد أن $x = \dfrac{3}{2},\ y = z$

مثال (٤) : F_1 , F_2 , F_3 ثلاث قوى تؤثر في ثلاث أحرف متعـــامدة وغـــير متقاطعة لمكعب طول ضلعه ℓ . أوجد معادلة المحور الرئيسي للمجموعـــة (محور اللولبية المكافئة).

الحل :



$$\overrightarrow{F_1} = F_1\,\overrightarrow{i}\;,\;(0,0,\ell)$$
$$\overrightarrow{F_2} = F_2\,\overrightarrow{j}\;,\;(\ell,0,0)$$
$$\overrightarrow{F_3} = F_3\,\overrightarrow{k}\;,\;(0,\ell,0)$$

متجه القوة الرئيسي (المحصلة)

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$$
$$= F_1\,\overrightarrow{i} + F_2\,\overrightarrow{j} + F_3\,\overrightarrow{k}$$

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$$

متجه العزم الرئيسي

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{r_2} \wedge \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{r_3} \wedge \overrightarrow{F_3}$$
$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 0 & \ell \\ F_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \ell & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & \ell & 0 \\ 0 & 0 & F_3 \end{vmatrix}$$
$$= \ell F_1\,\overrightarrow{i} + \ell F_2\,\overrightarrow{j} + \ell F_3\,\overrightarrow{k}$$
$$= \ell\,(F_3\,\overrightarrow{i} + F_1\,\overrightarrow{j} + F_3\,\overrightarrow{k}\,)$$

معادلة المحور الرئيسي للمجموعة (محور اللولبية المكافئة)

(أ) الصورة الاتجاهية :

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \mu\,\overrightarrow{F}$$

حيث

$$\vec{r}_o = \frac{\vec{F} \wedge \vec{M}}{F^2} \qquad (*)$$

$$\vec{F} \wedge \vec{M} = \ell \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ F_3 & F_1 & F_2 \end{vmatrix}$$

$$= \ell \left[(F_2^2 - F_3 F_1)\,\vec{i} + (F_3^2 - F_1 F_2)\,\vec{j} + (F_1^2 - F_2 F_3)\,\vec{k} \right]$$

بالتعويض في (*) نحصل على

$$\vec{r}_o = \frac{\ell \left[(F_2^2 - F_3 F_1)\,\vec{i} + (F_3^2 - F_1 F_2)\,\vec{j} + (F_1^2 - F_2 F_3)\,\vec{k} \right]}{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}$$

$$\equiv (x_o, y_o, z_o)$$

$$x_o = \frac{\ell (F_2^2 - F_3 F_1)}{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}, \quad y_o = \frac{\ell (F_3^2 - F_1 F_2)}{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}, \quad z_o = \frac{\ell (F_1^2 - F_2 F_3)}{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}$$

(ب) الصورة القياسية

$$\frac{x - x_o}{F_x} = \frac{y - y_o}{F_y} = \frac{z - z_o}{F_z}$$

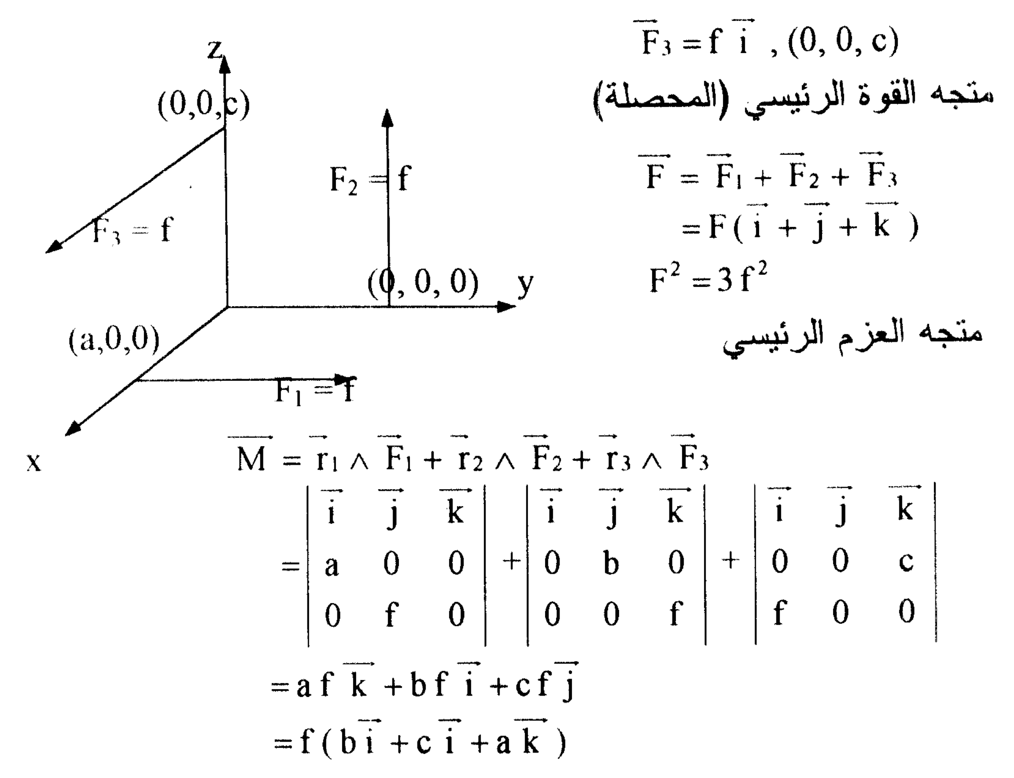
$$\frac{x - \dfrac{\ell (F_2^2 - F_3 F_1)}{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}}{F_1} = \frac{y - \dfrac{\ell (F_3^2 - F_1 F_2)}{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}}{F_2} = \frac{z - \dfrac{\ell (F_1^2 - F_2 F_3)}{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}}{F_3}$$

مثال (٥) : ثلاث قوى مقدار كل منهم f تؤثر الأولى عند النقطة (a, 0, 0) موازية للمحور oy والثانية عند النقطة (0, b, 0) موازية للمحور oz والثالثة عند النقطة (0, 0, c) موازية للمحور ox. أوجد اللولبية المكافئة.

الحل :

$$\vec{F}_1 = f\,\vec{j}, \quad (a, 0, 0)$$

$$\vec{F}_2 = f\,\vec{k}, \quad (0, b, 0)$$



$$\vec{F}_3 = f\,\vec{i}\;,\;(0, 0, c)$$

متجه القوة الرئيسي (المحصلة)

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$
$$= F(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$
$$F^2 = 3f^2$$

متجه العزم الرئيسي

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & c \\ f & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= af\,\vec{k} + bf\,\vec{i} + cf\,\vec{j}$$
$$= f(b\vec{i} + c\vec{i} + a\vec{k})$$

اللولبية المكافئة :

خطوة اللولبية :

$$\lambda = \frac{\vec{F}\cdot\vec{M}}{F^2} = \frac{f^2(b+c+a)}{3f^2}$$
$$= \frac{1}{3}(a+b+c)$$

معادلة المحور الرئيسي للمجموعة (محور اللولبية)

(أ) الصورة الاتجاهية $\quad \vec{r} = \vec{r}_o + \mu\,\vec{F}$

حيث

$$\vec{r}_o = \frac{\vec{F} \wedge \vec{M}}{F^2} \qquad (*)$$

$$\overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{M} = f^2 \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$= f^2 [(a-c)\overrightarrow{i} + (b-a)\overrightarrow{j} + (c-b)\overrightarrow{k}]$$

بالتعويض في (*) نحصل على

$$\overrightarrow{r_o} = \frac{f^2 [(a-c)\overrightarrow{i} + (b-a)\overrightarrow{j} + (c-b)\overrightarrow{k}]}{3f^2}$$

$$= \frac{1}{3}[(a-c)\overrightarrow{i} + (b-a)\overrightarrow{j} + (c-b)\overrightarrow{k}]$$

$$\equiv (x_o, y_o, z_o)$$

$$x_o = \frac{a-c}{3}, \; y_o = \frac{b-a}{3}, \; z_o = \frac{c-b}{3}$$

(ب) الصورة القياسية

$$\frac{x-x_o}{F_x} = \frac{y-y_o}{F_y} = \frac{z-z_o}{F_z}$$

$$\frac{x-\left(\frac{a-c}{3}\right)}{f} = \frac{y-\left(\frac{b-a}{3}\right)}{f}, \frac{z-\left(\frac{c-b}{3}\right)}{f}$$

$$3x - a + c = 3y - b + a = 3z - c + b$$

مثال (٦) : عين مقدار وخط عمل محصلة مجموعة القوى الآتية :

(i) $(3\sqrt{3}, 0^\circ)$ وتؤثر في النقطة $(1, 2)$

(ii) $(2, 45^\circ)$ وتؤثر في النقطة $(-4, \sqrt{2})$

(iii) $(6, 60^\circ)$ وتؤثر في النقطة $(3, 2)$

(iv) $(2, 135^\circ)$ وتؤثر في النقطة $(2, 2)$

(v) $(3\sqrt{3}, \pi)$ وتؤثر في النقطة $(0, 0)$

(vi) $(3\sqrt{3}, -\frac{\pi}{2})$ وتؤثر في النقطة $(0, 0)$

الحل :

$$\overrightarrow{F_1} = 3\sqrt{3}\cos 0\,\overrightarrow{i} + 3\sqrt{3}\,\text{si}\,0\,\overrightarrow{j}$$
$$= 3\sqrt{3}\,\overrightarrow{i} \qquad , (1, 2)$$
$$\overrightarrow{F_2} = 2\cos 45\,\overrightarrow{i} + 2\sin 45\,\overrightarrow{j}$$
$$= \sqrt{2}\,\overrightarrow{i} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{j} \qquad , (-4, \sqrt{2})$$
$$\overrightarrow{F_3} = 4\cos 60\,\overrightarrow{i} + 4\sin 60\,\overrightarrow{j}$$
$$= 2\,\overrightarrow{i} + 2\sqrt{3}\,\overrightarrow{j} \qquad , (3, 2)$$
$$\overrightarrow{F_4} = 2\cos 135\,\overrightarrow{i} + 2\sin 135\,\overrightarrow{j}$$
$$= -\sqrt{2}\,\overrightarrow{i} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{j} \qquad , (2, 2)$$
$$\overrightarrow{F_5} = 3\sqrt{3}\cos\pi\,\overrightarrow{i} + 3\sqrt{3}\sin\pi\,\overrightarrow{j}$$
$$= -3\sqrt{3}\,\overrightarrow{i} \qquad , (0, 0)$$
$$\overrightarrow{F_6} = 2\sqrt{3}\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{i} + 2\sqrt{3}\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{j}$$
$$= -2\sqrt{3}\,\overrightarrow{j} \qquad , (0, 0)$$

متجه القوة الرئيسي (المحصلة)

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} + \overrightarrow{F_5} + \overrightarrow{F_6}$$
$$= 2\,\overrightarrow{i} + 2\sqrt{2}\,\overrightarrow{j}$$

مقدار المحصلة

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{4+8} = 2\sqrt{3}$$

اتجاه المحصلة مع محور ox

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

متجه العزم الرئيسي

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r_1}\wedge\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{r_2}\wedge\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{r_3}\wedge\overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{r_4}\wedge\overrightarrow{F_4} +$$
$$+ \overrightarrow{r_5}\wedge\overrightarrow{F_5} + \overrightarrow{r_6}\wedge\overrightarrow{F_6}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3\sqrt{3} & 0 & 0 \end{vmatrix} + = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= -\sqrt{3}\,\vec{k} + (-4\sqrt{2}-2)\,\vec{k} + (6\sqrt{3}-4)\,\vec{k} + (2\sqrt{2}+2\sqrt{2})\,\vec{k}$$

$$= -6\,\vec{k}$$

ومعادلة خط عمل المحصلة تعطى من

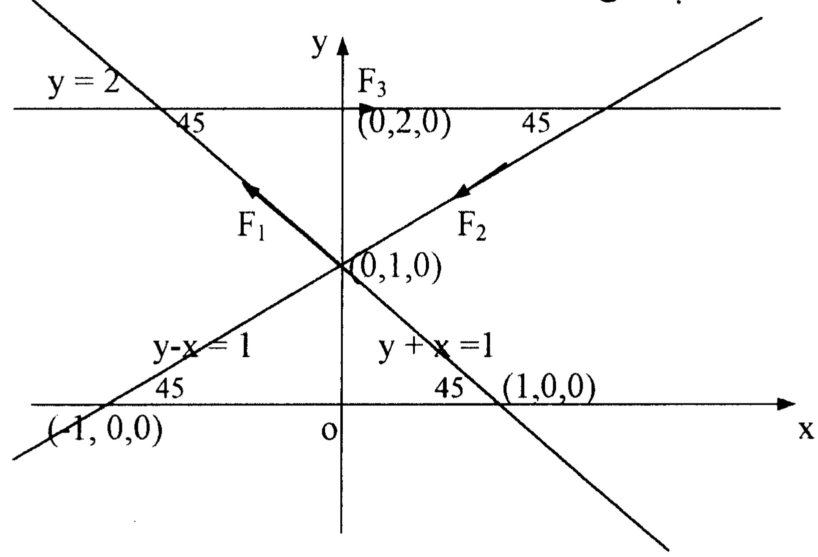
$$M = x\,F_y - y\,F_x$$

$$-6 = x\,(2\sqrt{2}) - y\,(2)$$

$$y = \sqrt{2}\,x + 3$$

مثال (٧) : تؤثر ثلاث قوى F_1 , F_2 , F_3 في أضلاع المثلث المكون من الخطوط $y = 2$, $y - x = 1$, $x + y = 1$. أوجد معادلة خط عمل المحصلة إذا أثرت القوى في اتجاه دوري واحد.

الحل : نرسم الخطوط المعطاة فنحصل على المثلث الذي تؤثر في أضلاعه القوى المعطاة كما بالشكل



$$\overrightarrow{F_1} = -F_1 \cos 45\, \overrightarrow{i} + F_1 \sin 45\, \overrightarrow{j}$$

$$= -\frac{F_1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \frac{F_1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j} \quad ,(0,1,0)$$

$$\overrightarrow{F_2} = -F_2 \cos 45\, \overrightarrow{i} - F_2 \sin 45\, \overrightarrow{j}$$

$$= -\frac{F_2}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} - \frac{F_2}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j} \quad ,(0,1,0)$$

$$\overrightarrow{F_3} = F_3\, \overrightarrow{i} \qquad ,(0,2,0)$$

متجه القوة الرئيسي (المحصلة)

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$$

$$= \left(F_3 - \frac{F_2}{\sqrt{2}} - \frac{F_1}{\sqrt{2}}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{F_1}{\sqrt{2}} - \frac{F_2}{\sqrt{2}}\right)\overrightarrow{j}$$

متجه العزم الرئيسي

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{r_2} \wedge \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{r_3} \wedge \overrightarrow{F_3}$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{F_1}{\sqrt{2}} & \frac{F_1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{F_2}{\sqrt{2}} & -\frac{F_1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ F_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{F_1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{k} + \frac{F_2}{\sqrt{2}}\overrightarrow{k} - 2F_3\overrightarrow{k}$$

$$= \left(\frac{F_1}{\sqrt{2}} + \frac{F_2}{\sqrt{2}} - 2F_3\right)\overrightarrow{k}$$

معادلة خط عمل المحصلة تعطى من العلاقة

$$M = x F_x - y F_y$$

$$= \frac{F_1}{\sqrt{2}} + \frac{F_2}{\sqrt{2}} - 2F_3 = x\left(\frac{F_1}{\sqrt{2}} - \frac{F_2}{\sqrt{2}}\right) - y\left(F_3 - \frac{F_2}{\sqrt{2}} - \frac{F_1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$F_1 + F_2 - 2\sqrt{2}\,F_3 = (F_1 - F_2) - \left(\sqrt{2}\,F_3 - F_2 - F_1\right)y$$

تمارين

(١) اختزل مجموعة القوى الآتية :

(i) $10\vec{k} - 10\vec{i}$ وتؤثر في النقطة $(1, 0, 0)$

(ii) $10\vec{i} - 10\vec{j}$ وتؤثر في النقطة $(0, 1, 0)$

(iii) $10\vec{j} - 10\vec{k}$ وتؤثر في النقطة $(0, 0, 1)$

(٢) اختزل مجموعة القوى الآتية عند بداية الإحداثيات والنقطة $(6, 6, 0)$ وتحقق من أن الكميـــة $(\vec{F} . \vec{M})$ (حيث $\vec{F} , \vec{M}$ متجـــهي المجموعـــة الرئيسين) لا تغيرية بالنسبة للمركزين ثم أوجد محور اللولبية المكافئة

(i) $5\vec{i} - 2\vec{j}$ تؤثر في النقطة $(0, 6, 0)$

(ii) $4\vec{j} - 6\vec{k}$ تؤثر في النقطة $(6, 6, 6)$

(iii) $7\vec{k} - 3\vec{i}$ تؤثر في النقطة $(6, 0, 0)$

(٣) القوتان $\vec{F}_1 , \vec{F}_2$ تؤثران في المستقيمين

$$(y = x \tan \alpha, \ = c) , (y = - x \tan \alpha , z = c)$$

أوجد خطوة ومعادلة محور اللولبية المكافئة.

(٤) أربعة قوى متساوية ثلاثة منها تؤثر في الاتجاهات الموجبـــة لمحـــاور الإحداثيات والرابعة تؤثر فـــــي المســـتقيم $\frac{x - a}{\alpha} = \frac{y - b}{\beta} = \frac{z - c}{\gamma}$ حيـــث α, β, γ جيوب تمام اتجاهه. أوجد معادلة محور اللولبية المكافئة.

(٥) oA, oB, oC ثلاث أحرف متجاورة لمكعب طول ضلعه ℓ بحيث كـــان AA', BB', CC', oo' هي أقطاره الأربعة أثـــرت القوى F_1 , F_2, F_3 فـــي الأحرف CB', AC', BA' على الترتيب. أوجد معادلـــة المحور الرئيسي

للمجموعة (محور اللولبية).

(٦) ABCDA'B'C'D' مكعب طول شلعه 2ℓ أثرت قوتان متساويتان في AD,C'A'.أثبت أن محور اللولبية المكافئة يمر بمركز المكعب ويوازي الحرف AB ثم أوجد خطوة اللولبية.

(٧) المجموع الجبري لعزوم مجموعة من القوى المستوية حول النقط (3- ,1) ,(4 ,3-) ,(1 ,2) يساوي على الترتيب 15 ,15- ,11 أوجد مقدار وخط عمل القوة التي تؤثر في النقطة (2 ,3) وتكون مع المجموعة السابقة ازدواجا. وأثبت أن عزمه يساوي 3 وحدة.

(٨) اختزل مجموعة القوى المستوية

(i) $(1, -45^{o})$ تؤثر في النقطة $(-1, 3)$

(ii) $(6, -180^{o})$ تؤثر في النقطة $(2, 5)$

(iii) $(8, 180^{o})$ تؤثر في النقطة $(0, -5)$

(٩) القوى ذات المقادير F, 2F, 3F, 4F, 5F, 6F تؤثر في أضلاع شكل سداسي منتظم في ترتيب دوري واحد. أثبت أنه تكافئ قوة واحدة 6F في اتجاه يوازي إحدى هذه القوى والنسبة بين بعدي خط عمل المحصلة والقوة التي توازيها من مركز الشكل تساوي 2 : 7.

(١٠) تؤثر القوى 3, 2, 4, 3, P في المستقيمات AB, CB, CD, AD,DB من المربع ABCD في الاتجاهات المحددة طبقا لترتيب الحروف السابقة. أوجد مقدار القوة P لتؤول المجموعة إلى ازدواج وأوجد عزمه.

الأجسام المتصلة بمفصلات :

Bodies Connected by Hinges :

إن دراسة الأجسام المتماسكة التي يتصل بعضها بالبعض إتصالا مفصليا يعتبر موضوعا هاما في علم الإنشاءات الهندسي. ولكن **ما هي المفصلة؟**. يمكن اعتبار المفصلة (Hinge, Joint) الملساء بأنها مسمار أسطواني يدخل في ثقوب اسطوانية في الأجسام بحيث يدور كل جسم من الأجسام حول المسمار دون أي إحتكاك. بذلك يؤول رد الفعل للمسمار على أي جسم من الأجسام المتصلة ببعضها بالمفصلة إلى قوة واحدة تمر بمركز المسمار.

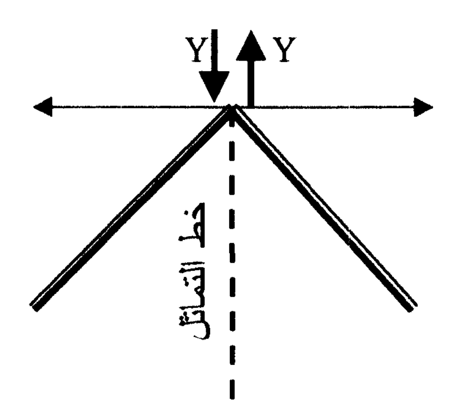
وإذا اتصل بالمفصلة الملساء جسمان فقط يكون تأثير المفصلة على الجسمين عبارة عن قوتين متساويتين ومتضادتين.

ولحل مسائل المفصلات توجد قاعدتان :

١ـ القاعدة الأولى :

إذا كانت قضبان الهيكل ثقيلة وكل من الهيكل والقوى المؤثرة عليه متماثلة بالنسبة إلى خط يمر بأي عدد من المفصلات فإن ردود الأفعال عند هذه المفصلات تكون عمودية على خط التماثل.

نفرض أن رد فعل المفصلة المبينة بالشكل والتي يمر بها خط تماثل مائل على هذا الخط وله مركبتين X, Y على كل نهاية من نهايتي القضيبين المتصلين بالمفصلة (المركبات متساوية ومتضادة حسب قانون الفعل ورد الفعل).



من التماثل لابد أن يكون $Y = 0$ وبذلك يؤول رد الفعل إلى قوة X عمودية على خط التماثل.

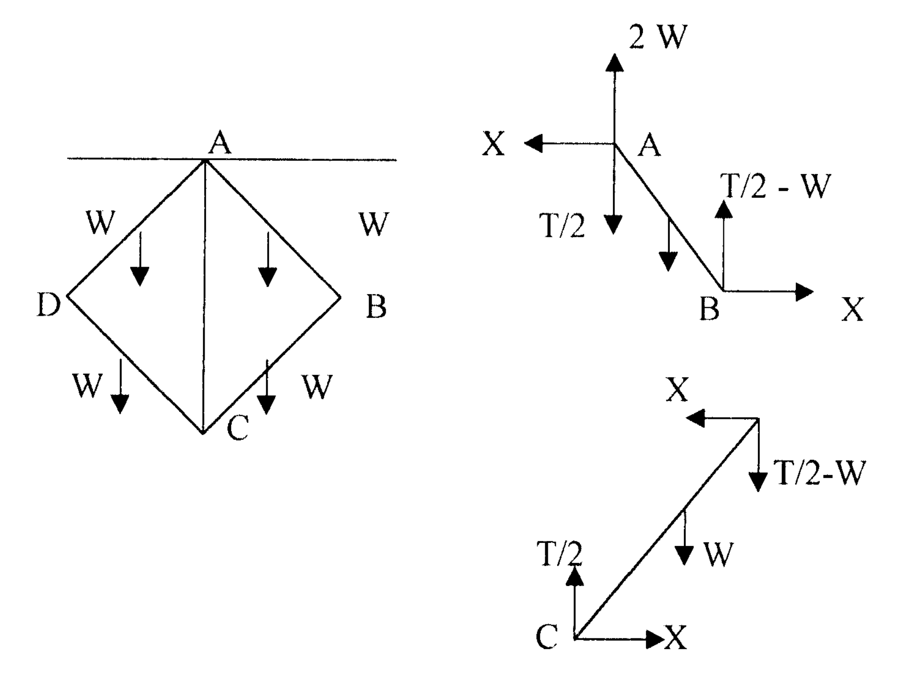
القاعدة الثانية :

عندما تكون قضبان الهيكل كلها أو بعضها خفيفا ولا يؤثر على أي قضيب من القضبان الخفيفه سوى ردي فعل المفصلتين عند نهايتيه يجب للاتزان أن يعملا ردا الفعل في اتجاه القضيب الخفيف ويعملا في اتجاهين متضادين ومتساويين.

مثال (١) : أربعة قضبان متساوية ثقيلة طول كل منها a ووزنه W ترتبط مفصليا لتؤلف هيكلا مربعا ABCD على الهيكل من المفصلة A وحفظ الشكل مربعا بخيط واصل من A إلى C. أوجد شد الخيط ومقدار واتجاه رد فعل المفصلة B أو D.

الحل :

من دراسة اتزان الهيكل كله نجد أن قوة التعليق تساوي مجموع الأوزان 4W.



AC خط تماثل (هذا المثال يشرح تأثير التماثل الاستاتيكي الهندسي في تكييف ردود الفعل على المفاصل الواقعة على خط التماثل AC) بالنسبة للهيكل ولكي يكون خط تماثل بالنسبة للقوى أيضا تقسم كل من قوة التعليق والشدين T, T عند A, C إلى قوتين متساويتين. عندئذ يكون رد فعل كل من المفصلتين A, C عموديا على خط التماثل AC المار بهما.

ومن التماثل يكفي أن ندرس اتزان كل من القضيبين AB, BC:

نفرض أن رد فعل المفصلة C على القضيب BC عبارة عن قوة أفقية X كما بالشكل. من إنعدام المركبتين الأفقية والرأسية للقوى المؤثرة على القضيب BC يتضح أن رد فعل المفصلة B يتكون من مركبتين $X, T/2 - W$ ويكون رد فعل المفصلة على القضيب AB عبارة عن مركبتين مساويتين لهما وضدهما في الاتجاه.

من انعدام المركبات الأفقية المؤثرة على القضيب AB نستنتج أن رد فعل المفصلة A عبارة عن قوة X. أما المركبات الرأسية فتنعدم نتيجة للدراسة السابقة لاتزان الهيكل كله.

لإيجاد X, T نأخذ العزوم للقضيب BC حول B والقضيب AB حول A فنجد أن :

$$2X + W = 2 \cdot \frac{T}{2} \quad ,$$

$$2X + 2\left(\frac{T}{2} - W\right) = W$$

وبالحل نحصل على

$$T = 2W \quad , \quad X = \frac{W}{2}$$

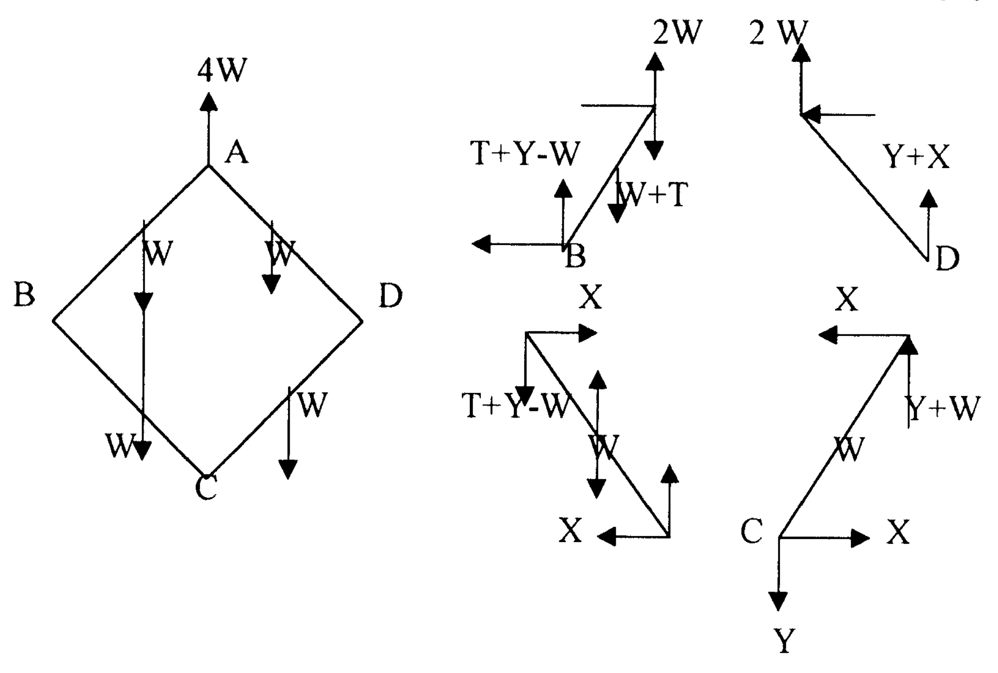
وتكون مركبتا رد فعل المفصلة B هما :

$$X = \frac{W}{2} \quad , \quad \frac{T}{2} - W = 0$$

مثال (٢): يتكون المربع ABCD من أربعة قضبان منتظمة متصلة ببعضها إتصالا سهلا. علقت المجموعة من نقطة A بينما يصل خيط بين منتصفي AB, BC لحفظ الشكل مربعا، إذا كان W هو وزن كل قضيب فأثبت أن الشد في الخيط هو 4W وأوجد رد الفعل عند كل من المفصلات B, C, D.

الحل : من اتزان الهيكل كله نجد أن قوة التعليق تساوي 4W. نفرض أن مركبتي رد فعل المفصلة C هما X, Y كما بالشكل التالي وأن الشد في الخيط T.

من اتزان (انعدام المركبات الأفقية والرأسية) القضيبين BC, CD تتعين ردود الأفعال عند المفصلتين B, C بدلالة X, Y, T كما هو مبين بالشكل.



بأخذ العزوم للقضبان AB, BC, CD حول النقط A, B, C على الترتيب.

نجد أن :

$$2X + 2(T + Y - W) = T + W \qquad (1)$$

$$2X + W - T = 2Y \qquad (2)$$

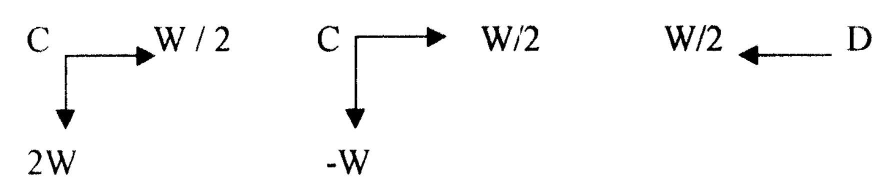
$$2X + 2Y + W = 0 \qquad (3)$$

من (1)، (2) نحصل على $X = \frac{W}{2}$

من (1)، (3) نحصل على $T = 4W$

$$\therefore \quad 2Y = -W - 2X = -2W$$

$$\therefore \quad Y = -W$$



∴ رد فعل المفصلة B يساوي $\frac{W}{2}\sqrt{17}$ ويصنع مع الأفقي $\tan^{-1} 4$ -.

رد فعل المفصلة C يساوي $\frac{W}{2}\sqrt{5}$ ويصنع مع الأفقي زاوية $\tan^{-1} 2$.

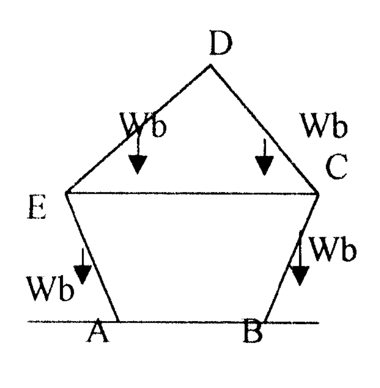
رد فعل المفصلة D أفقي ويساوي $\frac{W}{2}$.

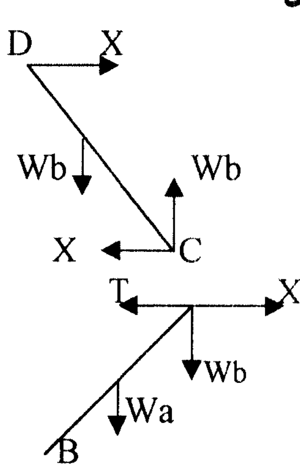
مثال (٣) : يتكون المخمس ABCDE من خمسة قضبان متصلة ببعضها اتصالا سهلا. وزن وحدة الطول من القضبان هي W. ثبت AB في وضع أفقي بحيث يقع المخمس في مستوى رأسي بينما يصل خيط بين المفصلتين C, E . إذا كان

$$BC = AE = a, \quad CD = DE = b\,, \quad \hat{A} = \hat{B} = 120^{\circ} \;, \; \hat{C} = \hat{E} = 90^{\circ}$$

فأثبت أن شد الخيط يساوي $\frac{W\,(a + 5\,b)}{2\,\sqrt{3}}$

الحل :





من اتزان الهيكل كله نجد أن قوة التثبيت عبارة عن قوة رأسية إلى أعلى تساوي مجموع أوزان القضبان الخمسة. رد فعل المفصلة D أفقي لأنه عمودي على خط تماثل الشكل والقوى.

يمكن اعتبار أن نهايتي الخيط مربوطتان بنهايتي القضيبين DC, DE أو القضيبين BC, AE وكلا الاعتبارين يؤدي إلى نفس النتائج النهائية وقد اخترنا الاعتبار الثاني.

بأخذ العزوم للقضيب CD حول C والقضيب BC حول B نجد أن :

$$X\, b \sin 30^{\circ} = Wb\,.\, \frac{b}{2} \cos 30^{\circ}$$

$$\therefore\ X = \frac{\sqrt{3}}{2}\, b\, W \quad ,$$

$$(T - X)\,.\, a \sin 60^{\circ} = W\, b\,.\, a \cos 60^{\circ} + W\, a\,.\, \frac{a}{2} \cos 60^{\circ}$$

$$\therefore\ T = \frac{\sqrt{3}}{2}\, b\, W + \frac{a + 2\, b}{2\sqrt{3}}\, W$$

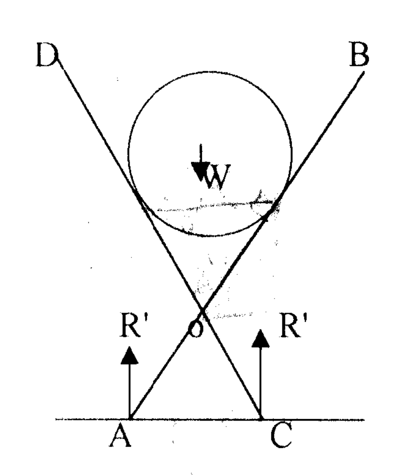
$$T = \frac{a + 5\, b}{2\sqrt{3}}\, W$$

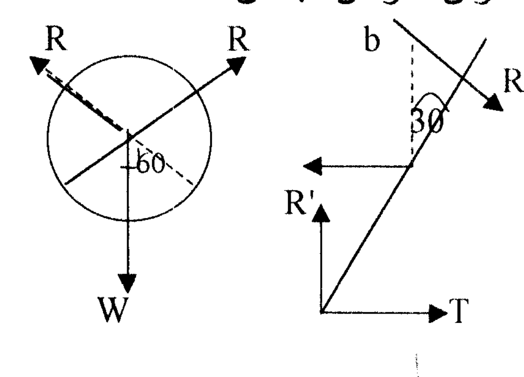
مثال (٤) : يتصل قضيبان خفيفان AB, CD طول كل منهما 2 a بمفصلة سهلة عند منتصفيهما. وضع القضيبان في مستوى رأسي بحيث يستند الطرفان A, C على منضده ملساء كما وضع قرص دائري قطره b ووزنه W بين القضيبين بحيث يكون مستواه رأسيا وحفظ اتزان المجموعة بخيط AD طوله يجعل الزاوية المحصورة بين القضيبين 60° . أوجد شد الخيط.

الحل :من اتزان المجموعة نجد أن :

$$2\, R' = W \qquad (1)$$

من اتزان القرص نجد أن :





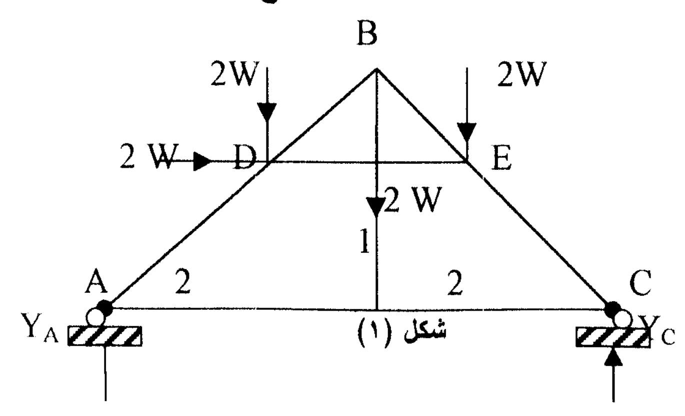
$$W = 2\,R\cos 60^{o} = R \qquad (2)$$

وبأخذ العزوم للقضيب AB حول o نجد أن :

$$T \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = R'\frac{a}{3} + R \cdot \sqrt{3}\,b \qquad (3)$$

$$\therefore\ T = \frac{W}{2\sqrt{3}} + \frac{2\,W\,b}{a}$$

مثال (٥) : يبين الشكل (١) هيكلا مكونا من القضبان AB, BC, DE مترابطة مفصليا والارتكاز في A بمفصل ثابت وفي C على حامل بسيط وتؤثر عليه القوى المبينة. عين ردود فعل جميع المفاصل.



شكل (١)

الحل : أولا اتزان المجموعة كلها

العزوم حول A تعطي

$$4\ Y_C = 2\ W\ (\ 3 + 2 + 1 + 1\ ) = 14\ W$$

$$\therefore\quad Y_C = 3.5\ W$$

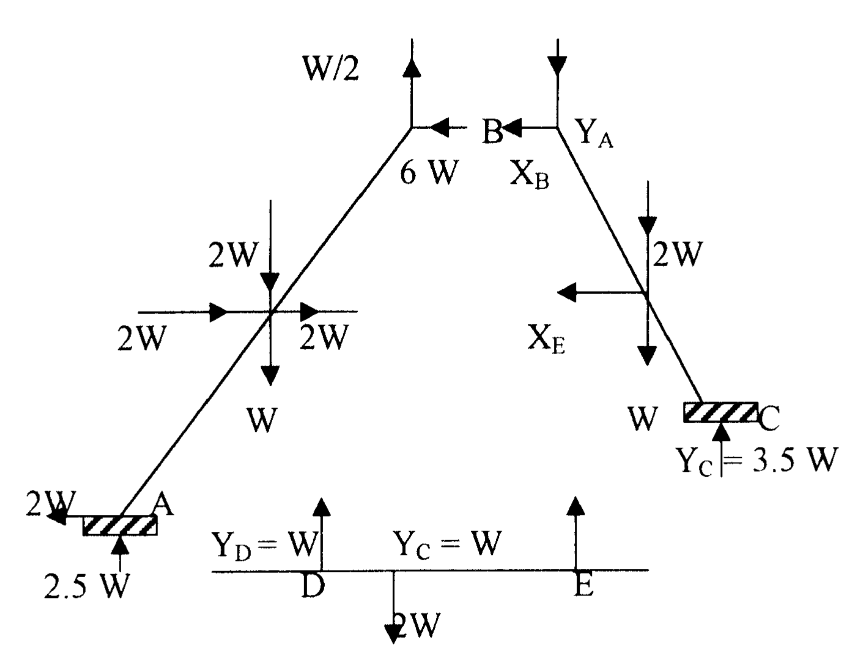
بالتحليل رأسيا نحصل على :

$$Y_A = 3.5\ W = 6\ W$$

$$\therefore\quad Y_A = 2.5\ W$$

وبالتحليل أفقيا نحصل على :

$$X_A = 2\ W$$



ثالثا : اتزان BC

$$Y_B = \frac{1}{2}\ W$$

العزوم حول B تعطي :

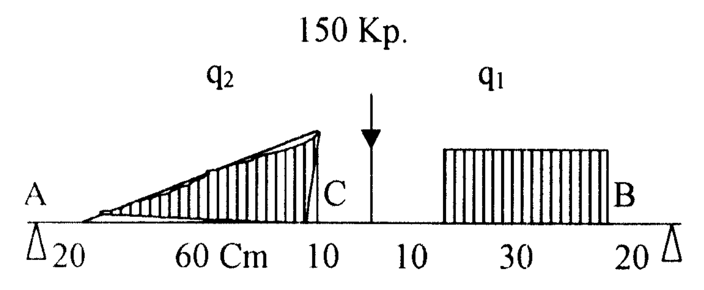
$$3.5\,W.2 - 3\,W.1 - X_E.1 = 0$$
$$\therefore \quad X_E = X_B = 4\,W$$

رابعا : اتزان AB . جميع القوى حددت ويبين الشكل توازنها على AB

مثال (٦) : إذا كانت

$$q_1 = 4\ Kp/Cm \quad , q_2 = 6\ Kp/Cm \ \text{at}\ C$$

فعين ردي الفعل عند A, B للعتب المبين في الشكل (٢).



الحل : محصلة الحمل الأول هي

$$W_1 = q_1 \times L_1 = 4 \times 30 = 120\ Kp.$$

وتعمل على بعد يساوي

$$20 + 15 = 35\ Cm\ \text{from}\ B$$

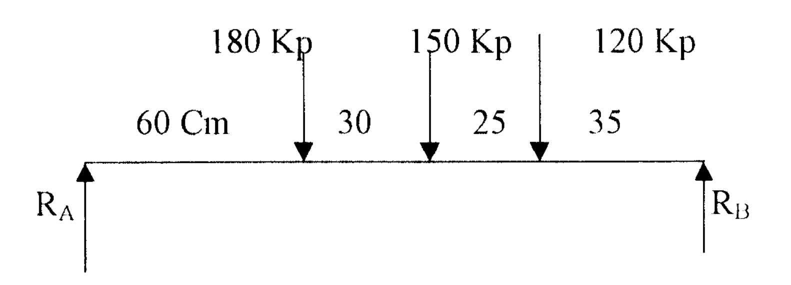
ومحصلة الحمل الثاني هي

$$W_2 = \frac{1}{2} q_2 \times L_2$$
$$= \frac{1}{2} \times 6.60 = 180\ Kp.$$

وتعمل على بعد 60 Cm من نقطة A على يسار C بمسافة 20 Cm.

ومن الاتزان نحصل على :

$$R_A + R_B = 180 + 150 + 120 = 450\ Kp.$$



العزوم حول B تعطي

$$R_A \, .150 = 120 \times 35 + 150 \times 60 + 180 \times 90$$

$$= 29400 \text{ Cm. Kp.}$$

$$\therefore \; R_A = 196 \text{ Kp} \qquad R_B = 254 \text{ Kp.}$$

مثال (٧) : يتكون المعين ABCD من أربعة قضبان منتظمة متسـاوية وزن كل منها متصلة اتصالا مفصليا. ربطت المفصلتان A, C بخيط خفيف مـرن طوله الطبيعي L لكي يحافظ الهيكل على شكله.

وكانت $C\hat{A}D = 30^\circ$. علق الهيكل من A. أوجد شد الخيـط وكذلـك ردي الفعل عند B أو D ثم عين معامل المرونة للخيط.

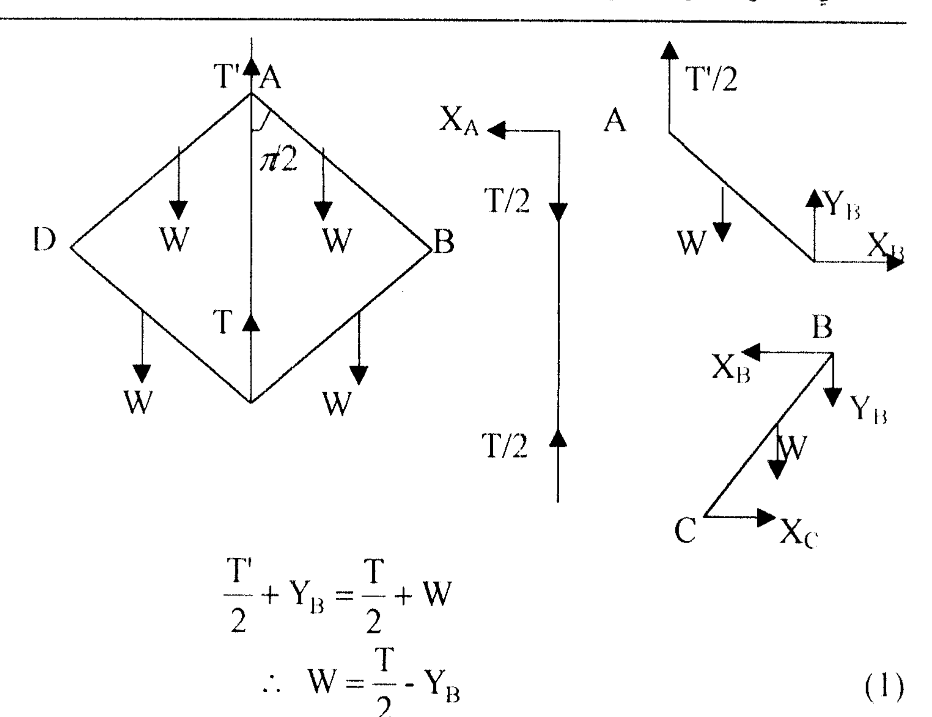
الحل : نفرض أن طول كل قضيب 2 L. إتزان الهيكل كله يعطي

$$T' = 4 \, W$$

$\because$ الشكل في حالة تماثل حول AC

$\therefore$ 'T نصفها يؤثر على AB والنصف الآخر يؤثر علـى AD. المركبـة الرأسية لرد الفعل تتلاشى عند كل من A, C

اتزان AB يعطي :



$$\frac{T'}{2} + Y_B = \frac{T}{2} + W$$

$$\therefore \quad W = \frac{T}{2} - Y_B \qquad (1)$$

العزوم حول A تعطي :

$$Y_B \,.\, 2 l \sin 30 - W\, L \sin 30 + X_B \,.\, 2\, L \cos 30 = 0$$

$$\therefore \quad Y_B + X_B \sqrt{3} = \frac{W}{2} \qquad (2)$$

إتزان BC. بأخذ العزوم حول C

$$X_B \,.\, 2\, L \cos 30 - W\, L \cos 30 - Y_B \,.\, 2\, L \sin 30 = 0$$

$$X_B \sqrt{3} - Y_B = W \sqrt{3} \qquad (3)$$

من (2)، (3) نحصل على :

$$X_B = \frac{W\left(1 + 2\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{3}} \quad , Y_B = \frac{W\left(1 - 2\sqrt{3}\right)}{4}$$

من العلاقة (1) نحصل على :

$$T = \frac{1}{2} W \left(5 - 2\sqrt{3}\right) \qquad (4)$$

لإيجاد معامل المرونة نطبق القانون

$$T = \lambda \frac{L' - L}{L} \qquad (5)$$

حيث λ معامل المرونة، L' طول الخيط في وضع الاتزان حيث

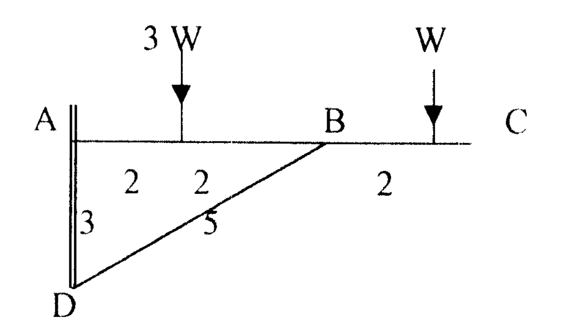
$$L' = 2\sqrt{3}\, L$$

من (4)، (5) نحصل على :

$$\lambda = W \frac{5 - 2\sqrt{3}}{2\left(2\sqrt{3} - 1\right)}$$

تمارين

(١) خيط أفقي AC مثبت مفصليا في A ويسنده ساند خفيف BD ويحمل الأحمال الموضحة بالشكل. عين ردود فعل المفاصل.



(٢) ثلاثة قضبان متساوية وزن الواحد منها W وطوله 2 a تتصل مفصليا مكونة مثلثا متساوي الأضلاع ABC. حمل الهيكل من منتصف AB على وتد أملس ثابت D. عين ردود فعل المفاصل.

(٣) سلم مزدوج يرتكز على أرض ملساء ويربط طرفيه السفليين سلسلة خفيفة. عين شد السلسلة نتيجة لوزن السلم فقط علما بأن وزن كل من رجليه W. إذا صعد السلم شخص وزنه 6 W عين شد السلسلة في هذه الحالة كدالة في بعده x عن مرتكز السلم.

(٤) ABCD مربع يتكون من أربعة قضبان منتظمة ثقيلة متساوية وزن كل منها W ومتصلة اتصالا مفصليا أملسا. علق الهيكل من المفصل A

وحفظ الهيكل بشكله الهندسي بواسطة خيط غير مرن واصل من A إلى C. أوجد شد الخيط ورد فعل المفصل B.

(٥) ABCDEF شكل سداسي منتظم يتكون من ستة قضبان متساوية متصلة ببعضها اتصالا سهلا وضع الشكل في مستوى رأسي بحيث يلامس AB منضده أفقية ويصل خيط خفيف بين C, F. أثبت أن الشد في الخيط $\sqrt{3}\,W$ حيث W وزن كل قضيب وأن رد فعل المفصلة E هو $\frac{W}{2}.\sqrt{\frac{7}{3}}$.

(٦) تتصل ثلاثة قضبان منتظمة متساوية AB, BC, CD بمفصلتين عند B, C كما تتصل النهايتان A, D بمفصلين مثبتين بحيث يميل AB على الأفقي بزاوية 60^o ويميل CD على الأفقي بزاوية 30^o وتقع B أعلى C وتقع C أعلى D. أوجد المركبة الأفقية لرد الفعل عند كل مفصلة وأوجد زاوية ميل BC على الأفقي.

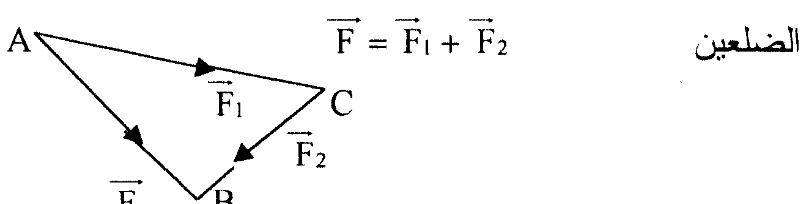
(٧) AB قضيب منتظم طوله 4 a ووزنه 4 W يتصل به عند B بمفصلة ملساء قضيب منتظم BC طوله 2 a ووزنه 2 W. إذا إتزن القضيبان في خط أفقي باستعمال قوتين رأسيتين عند A, C وقوة رأسية عند منتصف AC فأوجد مقادير هذه القوى.

الإستاتيكا البيانية

إن حل مسائل الاستاتيكا بالطرق البيانية يكون فرع من الميكانيكا يعرف باسم الإستاتيكا البيانية.

علمنا أن القوى كأي متجه يمكن تمثيلها بجزء من قطعة مستقيمة موجهة يتناسب مع مقدارها وينطبق مع اتجاهها وقد استخدمنا ذلك في إيجاد محصلة مجموعة من القوى المتلاقية في نقطة حيث وجدنا أنه بتمثيل المجموعة بيانياً سوف نحصل على ما يسمى بمضلع القوى وتكون المحصلة مُمثلة مقداراً واتجاهاً بالضلع الذي يقفل المضلع في اتجاه دوري مضاد لاتجاه القوى الممثلة بأضلاع المضلع وتؤثر هذه المحصلة في نفس نقطة تلاقي القوى المستوية المتلاقية أي في نقطة تأثير هذه القوى. أما إذا حدث وكان تمثيل القوى بواسطة مضلع مقفول ففي هذه الحالة تكون المحصلة متلاشية والقوى المتلاقية تكون في حالة اتزان ويعتبر هذا هو الشرط الضروري والكافي لإتزان مجموعة القوى المتلاقية بيانياً.

إذا كان لدينا قوة ما $\overrightarrow{F}$ في اتجاه ما ممثلة مقداراً واتجاهاً وخط عمل (أي ممثلة تمثيلاً تاماً بيانياً) بالمتجه $\overline{AB}$ ، كانت C نقطة أخرى ليست على الخط AB ووصلنا AC, CB فيمكن اعتبار وجود قوتين ممثلتين بهذين الضلعين $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$



بحيث تكون $\overrightarrow{F}$ هي محصلة هاتين القوتين ولكن تؤثران عند نقطة تأثير F.

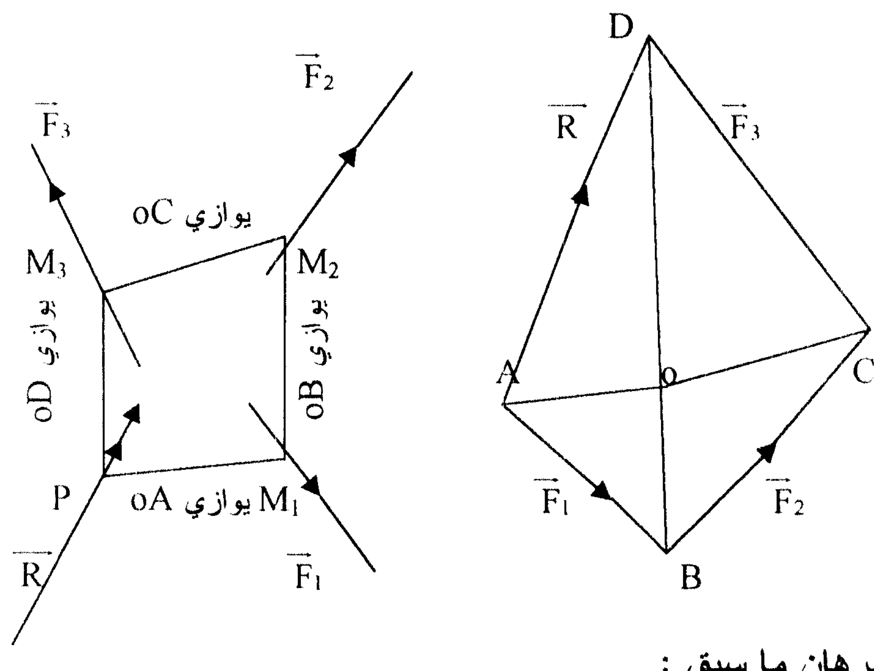
إيجاد محصلة مجموعة من القوى المستوية بيانياً (المضلع الخيطي) :

نفرض للسهولة أنه لدينا ثلاثة قوى مستوية فقط $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ والمطلوب إيجاد المحصلة مقداراً واتجاهاً وخط عمل بالطريقة البيانية. لذلك سوف نرسم مضلع القوى الذي أضلاعه تمثل القوى مقداراً واتجاهاً في ترتيب دوري واحد وليكن هو المضلع ABCD وتكون المحصلة $\overrightarrow{R}$ هي في اتجاه المتجه $\overline{AD}$ الذي يقفل المضلع في الاتجاه الدوري المضاد وتساويه مقداراً وتكون في نفس اتجاهه ولكن $\overline{AD}$ ليس هو خط عمل المحصلة (لا يمثلها تمثيلاً تاماً) ولإيجاد خط عمل المحصلة سوف نتبع طريقة ما يسمى بالمضلع الخيطي funicular polygon.

نأخذ نقطة ما o داخل (أو خارج) مضلع القوى ABCD ونصل o برؤوس المضلع. نأخذ أي نقطة على خط عمل القوة $\overrightarrow{F_1}$ ولتكن M_1 ونرسم المستقيم M_1M_2 موازياً oB وقاطعاً F_2 في M_2 . ومن M_2 نرسم المستقيم M_2M_3 موازياً oC وقاطعاً F_3 في M_3 . ومن M_1 نرسم المستقيم M_1P موازياً oA. ومن M_3 نرسم المستقيم M_3P موازياً oD ومتقاطعاً مع M_1P في النقطة P. بذلك فإن المحصلة سوف تمر بنقطة P ومن P نرسم المحصلة توازي اتجاه خط عملها AD فيكون هذا المتجه يمثل المحصلة مقدارا واتجاها وخط عمل.

المضلع $M_1M_2M_3P$ يسمى بالمضلع الخيطي أو المضلع الحبلي. نلاحظ من الرسم العلاقات الهندسية بين شكل مضلع القوى وشكل خطوط العمل فكل مستقيم في الشكل الأول يناظره مستقيم مواز في الشكل الثاني كما أن كل

مثلث في الشكل الأول يناظره ثلاثة مستقيمات متلاقية في نقطة في الشكل الثاني والأصل في هذا التناظر هو أن محصلة أي قوتين يجب أن تمر بنقطة تلاقيهما.



لبرهان ما سبق :

نستعيض عن القوة $\overrightarrow{F_1}$ بمركبتين في اتجاه $\overrightarrow{Ao}$, $\overrightarrow{oB}$ على الترتيب. كما نستعيض عن $\overrightarrow{F_2}$ بمركبتين في اتجاه $\overrightarrow{Bo}$, $\overrightarrow{oC}$. وأيضا نستعيض عن $\overrightarrow{F_3}$ بالمركبتين في اتجاه $\overrightarrow{Co}$, $\overrightarrow{oD}$ وهذه المركبات جميعها يمثلها الأضلاع المناظرة مقدارا واتجاها. وعلى ذلك يتضح أن المركبات في اتجاه المستقيمات oC, oB سوف تلاشي بعضها البعض وبذلك من كل المركبات الستة السابقة يتبقى المركبتين $\overrightarrow{Ao}$, $\overrightarrow{oD}$ فقط واللذين سوف نحصلهم إلى محصلة واحدة فقط هي محصلة القوى هي $\overrightarrow{AD}$.

نرسم هاتين القوتين على المضلع الخيطي (الذي أضلاعه تمثل القوى السابقة تمثيلاً تاماً مقداراً واتجاهاً وخط عمل) فتؤثران في الاتجاهين $\overrightarrow{PM_3}$ $\overrightarrow{PM_1}$ المتلاقيان في P والتي سوف تؤثر فيها المحصلة $\overrightarrow{R}$ للمجموعة كلها.

هناك عدة احتمالات يمكن الحصول عليها :

١ــ إذا كان مضلع القوى مقفل فإن مقدار المحصلة يكون مساوياً للصفر وينطبق $\overrightarrow{oD}$, $\overrightarrow{Ao}$ على بعضهما ويصبح المضلع الحبلي مفتوحاً لكون الضلعين M_1P, M_3P متوازيان وهما بذلك يمثلان قوتين متوازيتين ومتساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه وتكافئان مجموعة القوى المعطاة. بذلك فإن محصلة هذه القوى تكافئ ازدواج يقدر مقداره بحاصل ضرب مقدار القوة المساعدة وهي $|\overrightarrow{oD}|$ or $|\overrightarrow{oA}|$ مقاسة من مضلع القوى في المسافة العمودية h (مثلاً) بين الخطين المتوازيين M_1P, M_3P مقاسة في شكل خطوط القوى والمضلع الخيطي (مع مراعاة مقياس الرسم).

٢ــ إذا كان مضلع القوى مقفل والمضلع الخيطي مقفل أيضاً وفي هذه الحالة سنطبق المستقيمان M_1P, M_3P ويصبحا المستقيم M_1M_3 نفسه. وبذلك فإن الازدواج المحصل السابق سوف يتلاشى وتكون القوى في حالة اتزان.

٣ــ إذا كان مضلع القوى مفتوح فمعنى ذلك أن القوى سيكون لها محصلة ذات مقدار واتجاه معين ويحدد خط عملها كما سبق بواسطة المضلع الخيطي.

إيجاد محصلة مجموعة من القوى المستوية والمتوازية بيانيا:

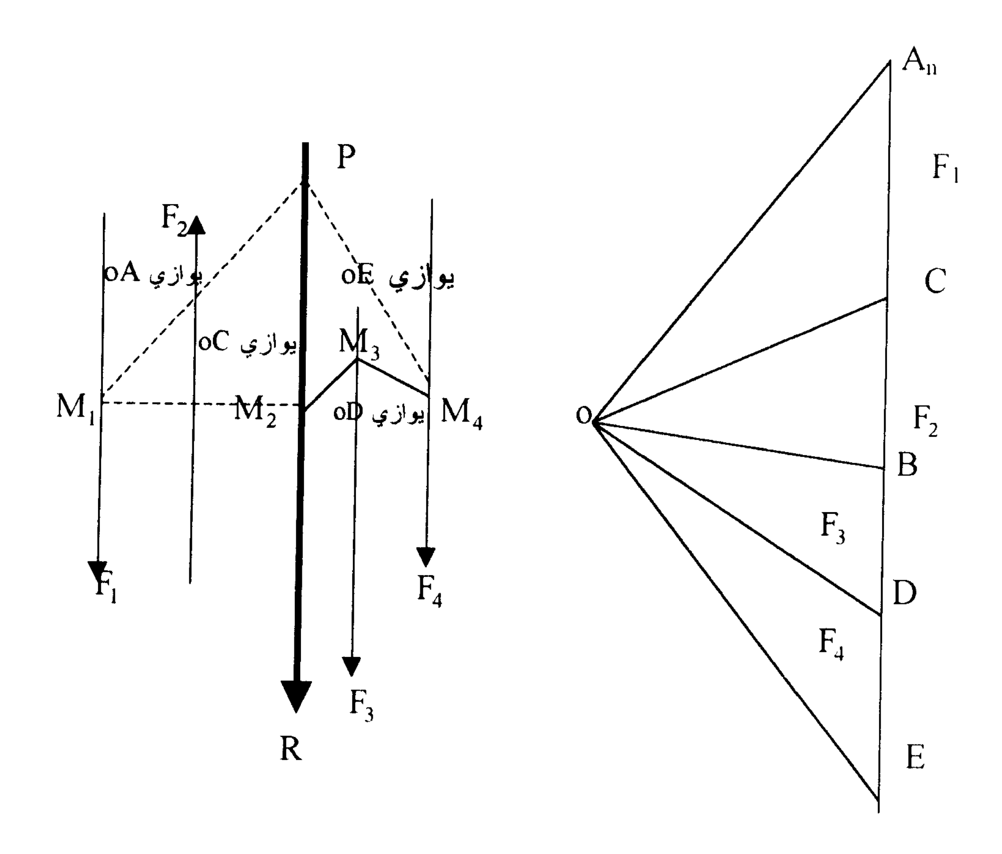
إذا كانت القوى المعطاة متوازية نتبع نفس الخطوات السابق أجراؤها في البند السابق مع ملاحظة أن مضلع القوى هنا سيكون خط مستقيم.

نفرض للسهولة لدينا أربعة قوى مستوية متوازية ولتكن هي $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ والمبينة في الرسم المعطى ثم نرسم مضلع القوى كما بالشكل المبين والذي سيكون هو المستقيم ABCDE مع ملاحظة أن AB يمثل القوة F_1 ثم BC يمثل القوة F_2 (في الاتجاه المعاكس للأولى) ثم CD يمثل القوة F_3 وأخيرا DE يمثل F_4 .

بذلك تكون محصلة هذه القوى هي طول المستقيم AE ويكون المطلوب هو أين تقع هذه المحصلة أو بمعنى أخر يكون مطلوب تعيين خط عمل المحصلة.

نأخذ نقطة o خارج المستقيم ABCDE ثم نصل بينها وبين كل نقط هذا المستقيم. نأخذ أي نقطة M_1 على خط عمل القوة F_1 ونرسم M_1M_2 موازيا oB وقاطعا F_2 في M_2. ثم نرسم المستقيم M_2M_3 موازيا oC وقاطعا F_3 في M_2. ثم نرسم المستقيم M_3M_4 موازيا oD وقاطعا F_4 في M_4. من M_1 نرسم مستقيم يوازي oA ومن M_4 نرسم مستقيم موازيا oE

فيتقاطع هذين المستقيمين في نقطة P والتي عندها سوف تؤثر المحصلـــة R لمجموعة القوى المعطاة، وتكون موازية للقوى.



تمارين

١ــ تؤثر القوى 10 وزن كجم عند نقطة A في اتجاه الجنوب الغربي و القوة $10\sqrt{2}$ وزن كجم في نقطة B في اتجاه 30° شمال الغــــرب و القـــوة $10\sqrt{2}$ ثقل كجم في نقطة C في اتجاه شمال الشرق بزاوية 30° و القوة 10 وزن كجم في اتجاه الجنوب الشرقي عند نقطةD حيث النقط ABCD خط مستقيـــم أفقي و البعـــد AB = ٣ متر و البعد BC = ٢ متر و البعــــد CD = ١ متر. أثبت بيانيا أن هذه المجموعة من القوى تكـــافئ إزدواج أوجده. (حل المسألة بالطريقة التحليلية أيضا).

٢ــ تؤثر القوى : $(10,-45^{\circ}), (10\sqrt{2},30^{\circ}), (10\sqrt{2},150^{\circ}), (10,-135^{\circ})$ عنـــد النقط A, B, C, D من الخط المستقيم الأفقي ABCD في اتجاه المحـــور الأفقي حيث AB = 2m. ،BC = 2m ،CD = 2m.
اثبت بيانيا أن هذه المجموعة تكون في حالة اتزان.

ملاحظة :

يمكن رسم الطول $10\sqrt{2}$ على أنه وتر مثلث قائم طول ضلعي القائمة 10.

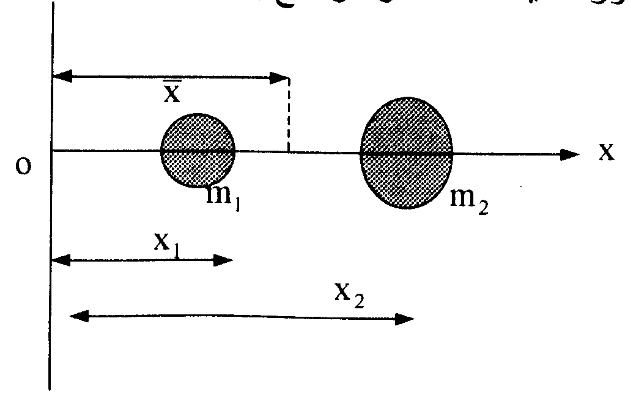
الباب الثالث

مركز الكتلة

خلال دراستنا لتحريك الأجسام افترضنا بأنها صغيرة جداً بحيث يمكن اعتبار أي واحد منها نقطة مادية كتلتها (m). وتتحرك تحت تأثير قوى خارجية مختلفة. إلا أن هذا التبسيط ليس صحيحاً دوماً إذ أنه لو نظرنا إلى جسم كبير يتحرك بشكل إنتقالي (أو انسحابي) لوجدنا أن كل نقطة منه تتحرك بنفس الشكل تماماً وبالتالي فإن اعتبار هذا الجسم مكافئاً لنقطة واحدة فقط صحيح في هذه الحالة، إلا أنه لو كان لدينا جسم كبير يتحرك بطريقة عشوائية (كإنتقال ودوران في نفس الوقت) لتحركت كل نقطة منه بشكل قد يختلف عن غيرها من النقاط. وحتى في الحالات التي يكون فيها لدينا عدة أجسام غير مرتبطة ببعضها بشكل واضح كما في الأجسام الصلبة، فإن مفهوم مركز الكتلة يساعد على دراسة الحركة الكلية لهذه الأجسام.

لذلك سنبدأ بتحديد موضع مركز الكتلة لجسمين m_1 , m_2 ثم نعمم النتيجة على عدة أجسام.

نفترض أن لدينا جسمين m_1 , m_2 في الموضعين x_1 , x_2 على الترتيب على محور السينات كما هو موضح بالشكل



عندئذ يمكن تعريف موضع مركز كتلة الجسمين بالعلاقة

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

ويمكن تعميم العلاقة (1) لإيجاد موضع مركز كتلة عدة أجسام منتشرة على محور السينات في الصورة

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}$$

أو على الصورة :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad (2)$$

حيث M هي الكتلة الكلية.

أما إذا كانت الجسيمات لا تقع على محور السينات كلها بل موزعة في الفضاء بحيث يتحدد موضع كل جسيم بمتجه $\overline{r}$ عندئذ موضع مركز الكتلة يعطى على الصورة :

$$\overrightarrow{r} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i \qquad (3)$$

وبأخذ مركبات العلاقة (3) على المحاور ox, oy, oz نحصل على

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

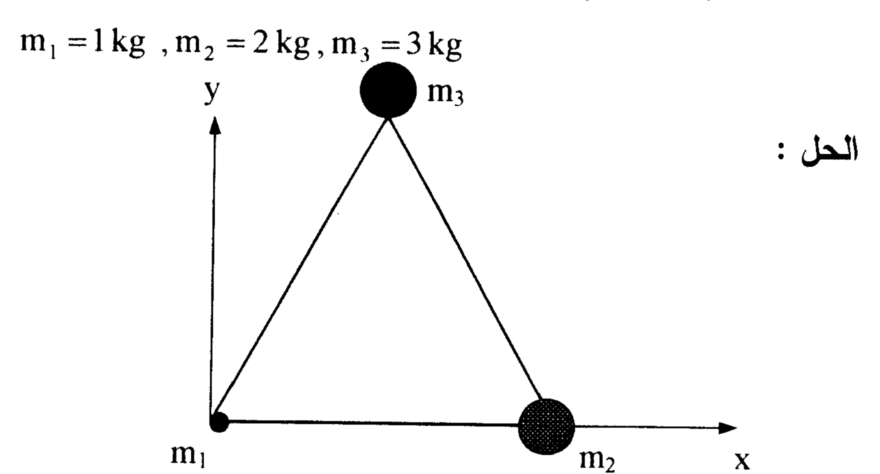
$$\bar{y} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad (4)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\, z_i$$

مثال (١) : حدد موضع مركز كتلة الكتل الثلاث الموضوعة علـــى رؤوس مثلث متساوي الأضلاع والذي طول ضلعه (10 Cm) حيث :

$$m_1 = 1\,kg\ ,\ m_2 = 2\,kg\ ,\ m_3 = 3\,kg$$

الحل :



إذا اخترنا المحورين ox, oy كما هو موضح بالشكل عندئذ تكون إحداثيـــات الكتل الثلاث كما يلي :

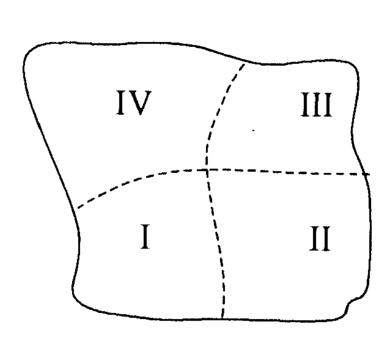
$$m_1(0,0)\ ,\ m_2\,(10,0)\ ,\ m_3\,(5, 5\sqrt{3}\,)$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{1(0)+2(10)+3(5)}{1+2+3} = 5.8\,Cm.$$

$$\bar{y} = \frac{1(0)+2(0)+3(5\sqrt{3})}{1+2+3} = 4.3\ Cm.$$

طرق إيجاد إحداثيات مركز الكتلة :

١ــ طريقة التقسيم :



غالبا ما يحدث في مسائل إيجاد مركز الكتلة لجسم ما. أن يحدد أولا مراكز كتل أجزاؤه

التي يمكن أن يقسم إليها. نفرض مثلاً أن لدينا جسم يمكن تقسيمه إلى عـــدد من الأجزاء I، II، III، IV.

كما بالشكل وأنه يمكن تحديد مركز كتلة كل جزء منها على حـــدة وذلـــك بالعلاقات الآتية :

$$\vec{r}_I = \frac{\left(\sum_n r_n \, \Delta M_n\right)_I}{M_I} \quad ; \quad \vec{r}_{II} = \frac{\left(\sum_n r_n \, M_n\right)_{II}}{M_{II}}$$

فإن مركز كتلة الجسم في النهاية يحدد بالعلاقة الآتية :

$$\vec{r} = \frac{M_I \, \vec{r}_3 + M_{II} \, \vec{r}_{II} + \ldots}{M}$$

واضح أنه في حالة الأجسام المتجانسة والمنتظمة فإنه يمكن استبدال الكتلـــة بالحجم أو المساحة أو الطول.

٢ـــ التماثل :

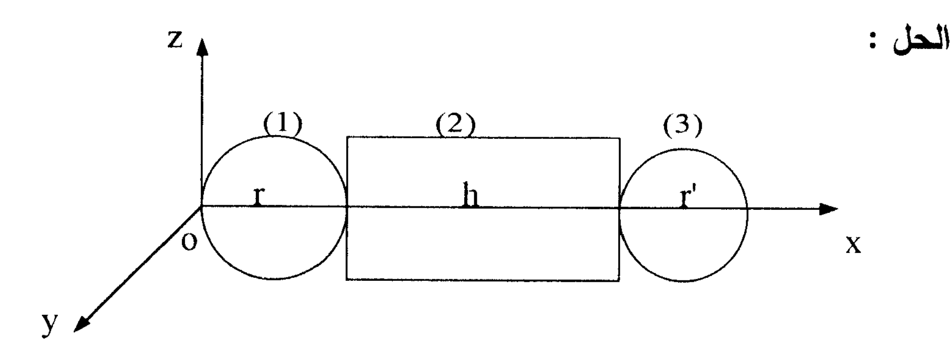
إذا كان الجسم متماثلاً بالنسبة لمستوى (محور أو نقطة) فإن مركـــز كتلة هذا الجسم يقع في مستوى (على محور أو في نقطة) التماثل.

٣ـــ طريقة الكتل السالبة :

هذه الطريقة تعتبر حالة خاصة من طريقة التقسيم وتستخدم في إيجاد مركز كتلة الأجسام المنزوع منها أجزاء حيث تعتبر كتلة الأجزاء المنزوعة سالبة.

مثال (٢) : أوجد مركز كتلة الجسم المكون من كرتين نصف قطريهما r, r' تفصلهما اسطوانة دائرية نصف قطر قاعدتها a وارتفاعها h إذا كان امتـــداد محور الأسطوانة يمر بمركز الكرتين.

الحل :



واضح أن المستقيم الذي يمر بمحور الأسطوانة يمثل محور تماثل بالنسبة للجسم. فإذا أخذنا محور x مثلاً ينطبق على هذا المستقيم ونقطة بداية الإحداثيات o على سطح إحدى الكور كما بالشكل، فإن مركز كتلة الجسم يقع محور x ($\bar{y}=\bar{z}=0$) وحيث أن مركز الجزء الأول يساوي r والثاني $2r+\frac{h}{2}$ والثالث $2r+h+r'$ فإن مركز كتلة الجسم $\bar{x}$ يتحدد بالعلاقة

$$\bar{x}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 .r+\pi a^2 h\left(2r+\frac{h}{2}\right)+\frac{4}{3}\pi r'^3\,(2r+h+r')}{\frac{4}{3}\pi r^3+\pi a^2 h+\frac{4}{3}\pi r'^3}$$

ويلاحظ هنا أن الكتل تتناسب مع الحجوم حيث أن الجسم متجانس (أي كثافته ثابتة).

وعندما تكون الكرتين متساويتين ($r=r'$) فإن :

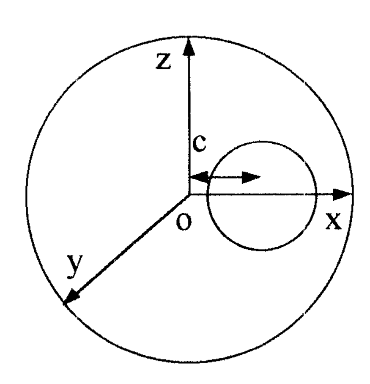
$$\bar{x}=\frac{\frac{4}{3}r^3\,(4r+h)+a^2\left(2r+\frac{h}{2}\right)}{\frac{8}{3}r^3+a^2 h}$$

$$=\frac{\left(2r+\frac{h}{2}\right)\left(\frac{8}{3}r^3+a^2 h\right)}{\frac{8}{3}r^3+a^2 h}$$

$$=2r+\frac{h}{2}$$

مثال (٣) : أوجد مركز كتلة قرص دائري نصف قطره r نزع منه جـــزء دائري نصف قطره 'r إذا كانت المسافة بين مركـــزي الجــزء المــنزوع والقرص تساوي C.

الحل :



المستقيم الواصل بين المركزين يمثل محور التماثل فإذا أخذنا نقطة بدايـــة الإحداثيات o في مركز القرص ومحور x يمر بمركز الجزء المنزوع فـــإن مركز كتلة الجزء الباقي يقع على محور x $(\bar{y}=\bar{z}=0)$ ويحدد بالعلاقة

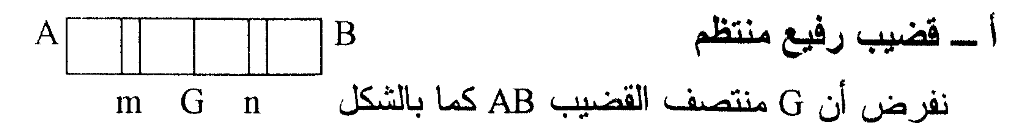
$$\bar{x}=\frac{r^2\,xo - r'^2\,c}{\left(r^2 - r'^2\right)}=\frac{-\,r'^2\,c}{r^2 - r'^2}$$

يلاحظ أيضاً في هذا المثال أن الكتل تتناسب مع المساحة حيث أن الجســـم متجانس (الكثافة ثابتة) ومنتظمة (ثابت السمك).

٤ــ مركز ثقل بعض الأشكال (الأجسام) :

في حالات كثيرة فإن مركز الكتلة يمكن تحديده بطرق هندسية بسيطة

أ ــ قضيب رفيع منتظم



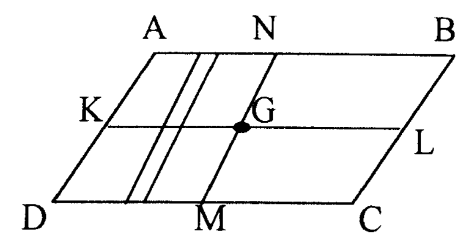
نفرض أن G منتصف القضيب AB كما بالشكل

يمكن اعتبار أن القضيب مكون من أزواج من العناصر المتناظرة على أبعاد متساوية من منتصف القضيب G.

مركز كل زوج من هذه العناصر كالموجود عند النقطتين m, n في الشكل يقع في منتصف المسافة mn أي في منتصف القضيب G وبذلك فإن مركز كتلة القضيب كله يقع عند منتصفه.

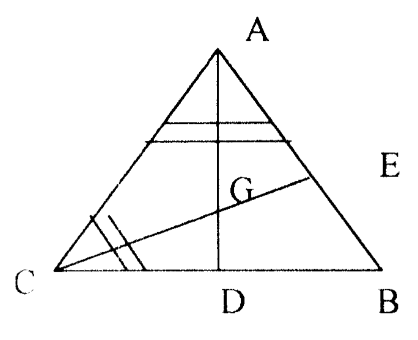
ب ـ مساحة متوازي الأضلاع :

نفرض أن ABCD متوازي الأضلاع المطلوب تحديد مركز كتلته، فبرسم سلسلة من المستقيمات الموازية لأحد أضلاعه وليكن AD مثلا يقسم



متوازي الأضلاع بذلك إلى سلسلة من الشرائح الرقيقة مركز كتلة كل منها يقع في منتصفها (قضيب رفيع) وبذلك فإن مركز كتلة متوازي الأضلاع يقع على المستقيم KL الواصل بين منتصفي الضلعين المتقابلين AB, BC وبنفس الطريقة (تقسيم متوازي الأضلاع إلى سلسلة من الشرائح موازية لأي من الأضلاع (AB أو DC) نجد أن مركز كتلة متوازي الأضلاع يقع على المستقيم MN الواصل بين منتصفي الضلعين المتقابلين AB, DC وبذلك فإن مركز كتلة متوازي الأضلاع G يقع في نقطة تقاطع المستقيمين MN، KL واضح أن G هي أيضا نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع.

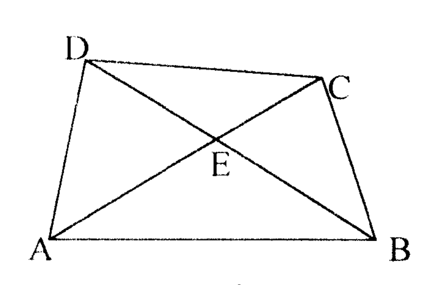
جـ ـ مساحة مثلثية :



بتقسيم مساحة المثلث ABC إلى سلسلة من المستقيمات الموازية للضلع AB (إلى شرائح رقيقة) مركز كتلة كل منها يقع في منتصفها وبذلك فإن مركز كتلة المساحة المثلثية يقع على المستقيم الواصل من الرأس A إلى منتصف القاعدة BC (المستقيم المتوسط) وبالمثل فإنه بتقسيم المثلث إلى شرائح موازية للضلع AB فإن مركز كتلته يقع على المستقيم الواصل من الرأس C إلى منتصف القاعدة AB وبذلك فإن مركز كتلة المساحة المثلثية G يقع في نقطة تقاطع مستقيماته المتوسطة.

ومن المعروف أن هذه النقطة تقسم هذه المستقيمات بنسبة 2 : 1 من جهة القاعدة المناظرة. يلاحظ أن مركز كتلة المساحة المثلثية ينطبق مع مركز كتلة ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث.

د ـ مساحة رباعية (شكل رباعي) :

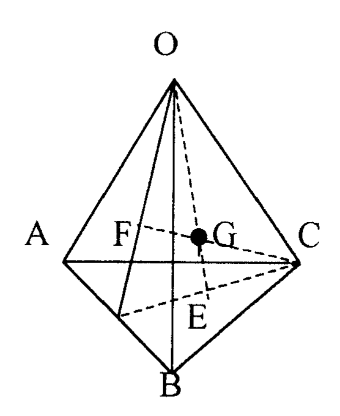


في الواقع أنه لا توجد طريقة بسيطة لتحديد مركز كتلة الشكل الرباعي كما في الحالات السابقة.

ولكن من المناسب في كثير من الأحيان استخدام النظرية الآتية :

مركز كتلة الشكل الرباعي ينطبق مع مركز كتلة أربع كتل متساوية موضوعة عند رؤوسه وكتلة مساوية لهم مأخوذة بإشارة سالبة موضوعة عند نقطة تقاطع أقطار الشكل الرباعي.

هـ ــ هرم ثلاثي :



لإيجاد مركز كتلة الهرم الثلاثي OABC نقسمه إلى عناصر مثلثية موازية للقاعدة ABC.

مراكز كتل هذه العناصر (مركز كتلة الهرم) تقع على المستقيم الواصل من رأس الهرم O إلى مركز القاعدة E الذي يمثل نقطة تقاطع المستقيمات المتوسطة للقاعدة المثلثية أي أنه في الشكل الموضح سابقا يكون

$$DE = \frac{1}{3} DC$$

وبنفس الطريقة أي تقسيم الهرم إلى عناصر صغيرة موازية لأحد أوجهه وليكن OAB نجد أن مراكز كتل هذه العناصر (مركز كتلة الهرم) تقع على المستقيم الواصل من الرأس O إلى F مركز الوجه OAB أي أنه في الشكل يكون

$$DF = \frac{1}{3} DO$$

وعندئذ تكون النقطة G نقطة تقاطع المستقيمين OE, CF هي مركز كتلة الهرم ولتحديد هذه النقطة نصل EF، واضح أن EF يوازي CO ومن تشابه المثلثين GOC، GEF نجد أن :

$$\frac{GE}{GO} = \frac{EF}{OC}$$

ولكن

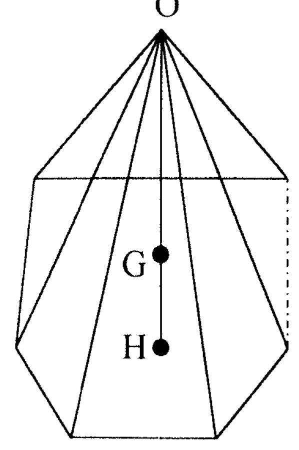
$$\frac{EF}{OC} = \frac{DE}{DC} = \frac{DF}{DO} = \frac{1}{3}$$

وبذلك فإن :

$$GE = \frac{1}{3} GO = \frac{1}{4} EO$$

أي أن مركز كتلة الهرم الثلاثي تقع على المستقيم الواصل بين رأس الهرم ومركز كتلة قاعدته على بعد ربع هذا المستقيم من جهة القاعدة.

و ــ هرم قاعدته كثيرة الأضلاع :

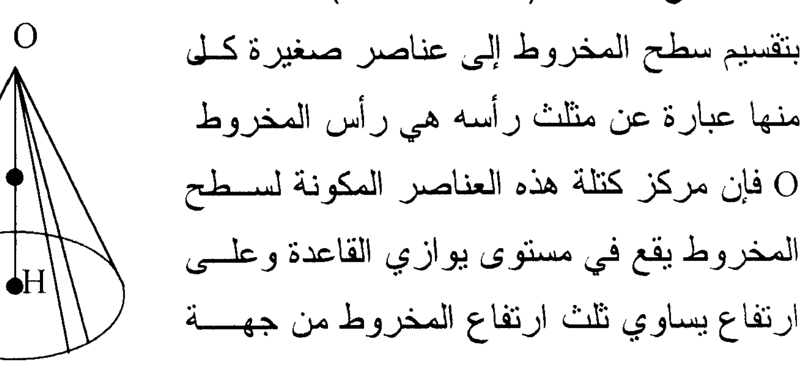


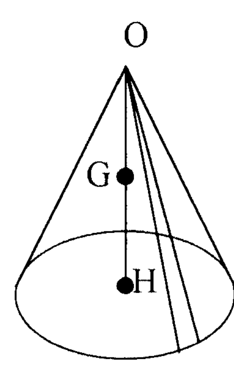
بتقسيم قاعدة الهرم إلى مثلثات فإننا نحصل على مجموعة من الأهرامات الثلاثية، ومركز كتلة كل منها يقع على بعد $\frac{1}{4}$ المستقيم الواصل إلى مركز كتلة القاعدة أي أن مركز كتلة الهرم يقع في مستوى يوازي القاعدة على ارتفاع يساوي ربع ارتفاع الهرم، كما أنه بتقسيم الهرم إلى شرائح موازية للقاعدة فإن مركز كتلة جميع هذه العناصر (مركز كتلة الهرم) يقع على المستقيم الواصل من رأس الهرم O

إلى مركز كتلة قاعدته H. وبذلك فإن مركز كتلة الهرم G هي نقطة تقاطع المستقيم GH مع المستوى الموازي للقاعدة وعلى ارتفاع منها يساوي $\frac{1}{4}$ ارتفاع الهرم أي أن $HG = \frac{1}{4} HO$

يلاحظ أنه إذا زاد عدد أضلاع القاعدة إلى عدد لانهائي فإننا نحصل بذلك على مخروط رأسه O وقاعدته مساحة مستوية محدودة بالمنحنى وبذلك فإن مركز كتلة المخروط تقع أيضا على المستقيم الواصل من رأسه إلى مركز قاعدته على بعد $\frac{1}{4}$ هذا المستقيم من جهة القاعدة.

ز ـ سطح مخروط (مخروط أجوف) :


بتقسيم سطح المخروط إلى عناصر صغيرة كل منها عبارة عن مثلث رأسه هي رأس المخروط O فإن مركز كتلة هذه العناصر المكونة لسطح المخروط يقع في مستوى يوازي القاعدة وعلى ارتفاع يساوي ثلث ارتفاع المخروط من جهة القاعدة.



وبذلك يكون مركز كتلة سطح المخروط هي نقطة تقاطع هذا المستوى مع المستقيم الواصل من رأس المخروط إلى مركز كتلة المنحنى المحدد للقاعدة فإذا كانت H هي مركز كتلة المنحنى المحدد للقاعدة، G مركز كتلة سطح المخروط فإن

$$HG = \frac{1}{3} HO$$

إيجاد مركز الكتلة بالتكامل :

باعتبار حالة جسم صلب كبير مؤلف من عـــدد كبــير جــدا مــن الجسيمات (أو الذرات) بحيث يمكن اعتبار هذا الجسم علــى أنــه توزيــع مستمر للكتلة M على الحجم الكلي V. عندئذ يمكن تجزئة الجسم إلى أجزاء صغيرة جدا متناهية في الصغر كتلتها Δm_i ويتحــدد موضعــها بــالوضع $r_i = (x_i , y_i , z_i)$ وبالتالي فإن موضع مركز الكتلة يمكن تحديده بالعلاقـات الآتية :

$$\bar{x} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} (\Delta m_i) x_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

بالمثل

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \int y \, dm \;, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \int z \, dm$$

ويتم إجراء التكاملات بفرض أن كثافة الجسم ρ معطاة بالعلاقة

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

وبذلك يمكن إعادة كتابة العلاقات السابقة في الصورة

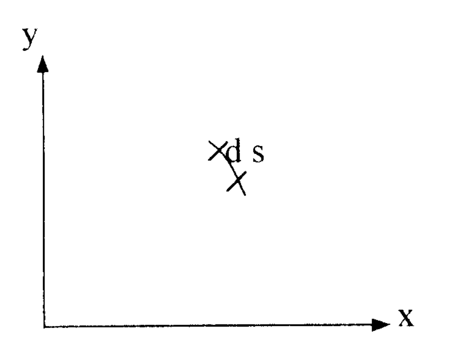
$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int x \rho \, dV = \frac{1}{M} \int_V \rho x \, dx\, dy\, dz \quad ,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \int_V \rho \; y \, dx\, dy\, dz,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \int_V \rho \; z \, dx\, dy\, dz.$$

أولا : إيجاد مركز كتلة منحنى :

بفرض منحنى مستوي وكـــانت ρ الكثافته الطولية لهذا المنحنى. فــإن عنصر الكتلة dm في هذه الحالـــة يمكن التعبير عنه في الصورة



$$dm = \rho\, ds$$

حيث ds هو عنصر الطول من هذا المنحنى عند النقطة (x, y) يلاحـــظ أن النقطة (x, y) تمثل مركز كتلة هذا العنصر ds وبذلك فإن إحداثيات مركـــز كتلة هذا التوزيع (المنحنى) يعبر عنها بالعلاقات الآتية :

$$\bar{x} = \frac{\int x \rho\, ds}{\int \rho\, ds} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y \rho\, ds}{\int \rho\, ds}$$

وفي حالة التوزيع المنتظم(ρثابتة) فإن

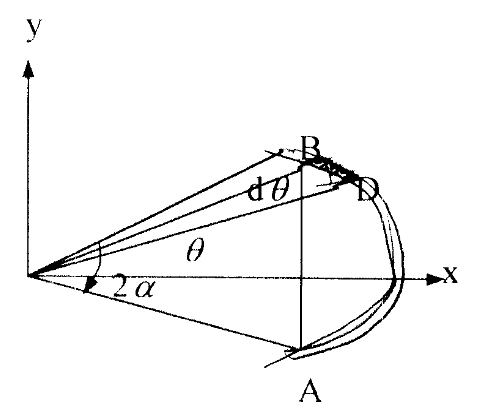
$$\bar{x} = \frac{\int x\, ds}{\int ds} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y\, ds}{\int ds}$$

ولإجراء هذه التكاملات نستخدم معادلة المنحنى مع العلاقـــة بيـــن مربـــع عنصر الطول وكل من الإحداثيات الكرتيزية أو القطبية التي تأخذ الصورة

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2$$

مثال (٤) : أوجد مركز كتلة قوس من دائرة نصف قطرهـــا a ويحصـــر زاوية 2α عند مركز الدائرة؟

الحل : بفرض أن المحور ox محور تماثل بالنسبة للمنحنى (ox عمـــودي على AB).



ويمر بمركز الدائرة من ذلك نجـــد أن المحور ox يمر بمركز كتلة الدائــــرة وأيضا مركزها الهندسي

$\therefore \ \bar{y}=0$

نصل نهايتي القوس بمركـــز الدائـــرة فتكون الزاوية المركزية تساوي 2α،

وينقسم القوس إلى عناصر طول ds كما بالشكل فإن مركز كتلة القوس يتحدد من العلاقة

$$\bar{x}=\frac{\int x\ ds}{\int ds}\ ,\bar{y}=0$$

من هندسة الشكل يتضح أن

$$x=a\cos\theta\ ,y=a\sin\theta\ ,ds=a\,d\theta$$

وبذلك فإن :

$$\bar{x}=\frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} a^2\cos\theta\,d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} a\,d\theta}=\frac{a\left[\sin\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}}{\left[\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}}$$

$$=\frac{a\sin\alpha}{\alpha}$$

عندما $\alpha=\frac{\pi}{2}$ نحصل على مركز كتلة نصف محيط دائرة نصف قطرهـــا a في الصورة $\bar{x}=\frac{2a}{\pi}$

ثانيا : المساحات والسطوح :

في حالة توزيع مادة الجسم على سطح ما وكانت ρ الكثافة السطحية (كتلة وحدة المساحات) لهذا الجسم عند النقطة (x, y, z) فإن عنصر الكتلة $d\,m$ عند هذه النقطة يرتبط بعنصر المساحة $d\,A$ عند نفس النقطة بالعلاقة $d\,m = \rho\, d\,A$ وبذلك فإن إحداثيات مركز كتلة هذا السطح تتحدد من العلاقة

$$\bar{x} = \frac{\int x\,\rho\, d\,A}{\int \rho\, d\,A}\ ,\ \ \bar{y} = \frac{\int y\,\rho\, d\,A}{\int \rho\, d\,A}\ ,\ \ \bar{z} = \frac{\int z\,\rho\, d\,A}{\int \rho\, d\,A}$$

أما إذا كان التوزيع منتظم (الكثافة السطحية ثابتة) فإن

$$\bar{x} = \frac{\int x\, d\,A}{\int d\,A}\ ,\ \ \bar{y} = \frac{\int y\, d\,A}{\int d\,A}\ ,\ \ \bar{z} = \frac{\int z\, d\,A}{\int d\,A}$$

حيث اختيار عنصر المساحة $d\,A$ يعتمد على شكل الجسم.

مثال (٥) : صفيحة مستوية تقع بين المنحنى $y = f(x)$ والمحور y والمستقيمين $x = a\ ,\ x = b$

الحل : نقسم المساحة إلى عناصر صغيرة على هيئة مستطيلات ونعتبر أحدها مساحة هذا العنصر يعطى من $d\,A = y\,d\,x$

عندئذ كتلته تعطى من

$d\,m = \rho\, y\, d\,x$ (ρ الكثافة السطحية)

ونقطة مركز كتلة هذا العنصر هي $\left(x, \frac{y}{2}\right)$

∴ مركز كتلة المساحة المطلوبة تعطى على الصورة :

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b \rho\, x\, y\, d x}{\int_a^b \rho\, y\, d x} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int_a^b \rho\, \frac{y}{2}\, y\, d x}{\int_a^b \rho\, y\, d x}$$

مثال (٦) : أوجد مركز كتلة المساحة المحدودة بالمنحنى $y^2 = 4x$ ، $y = 0 , y = 1$

الحل : نقسم المساحة إلى عناصر صغيرة على هيئة مستطيلات ونعتبر أحدها كما بالشكل عندئذ عنصر الكتلة هو

$$d m = \rho\, d A = \rho\, x\, d y$$

ومركز كتلة هذا العنصر هو $\left(\frac{x}{2}, y\right)$

∴ مركز كتلة المساحة المطلوبة هي

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 \frac{x^2}{2}\, d y}{\int_0^1 x\, d y}$$

بالتعويض عن قيمة x في العلاقة السابقة من معادلة المنحنى $\left(x = \frac{y^2}{4}\right)$

نحصل على

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{32}\int_0^1 y^4\, d y}{\int_0^1 y^2\, d y} = \frac{1}{8}\, \frac{\left.\frac{y^5}{5}\right|_0^1}{\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1} = \frac{3}{40}$$

وبالمثل $\bar{y}$ يعطى على الصورة

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 x\,y\,d\,y}{\int_0^1 x\,d\,y} = \frac{\frac{1}{40}\int_0^1 y^3\,d\,y}{\frac{1}{4}\int_0^1 y^2\,d\,y} = \frac{3}{4}$$

أي أن مركز كتلة المساحة المطلوبة هي $\left(\frac{3}{40}, \frac{3}{4}\right)$

مثال (٧) : أوجد مركز كتلة صفيحة مستوية تقع بين المنحنى

$\theta = \beta,\ \theta = \alpha, r = f(\theta)$

الحل : في هذه الحالة نقسم المساحة إلى عناصر صغيرة على هيئة مثلثات تقع رؤوسها عند نقطة الأصل وقاعدة كل منها على المنحنى

y
ds
r = f(θ)
r
dθ
θ
o
x

واضح أن مركز ثقل هذا العنصر يقع على المستقيم المتوسط ويقسمه بنسبة 2 : 1 من جهة القاعدة عندئذ عنصر الكتلة يعطى من

$$d\,m = \rho\,d\,A = \rho . \frac{1}{2} d\,s\,r = \frac{1}{2}\rho\,r^2\,d\,\theta$$

حيث $(d\,s = \rho\,d\,\theta)$

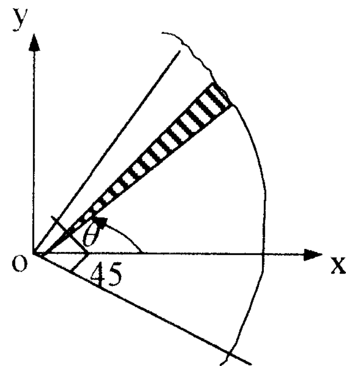
ومركز كتلة هذا العنصر هو

$$\left(\frac{2}{3} r\cos\theta, \frac{2}{3} r\sin\theta\right)$$

ومن ذلك فإن مركز كتلة المساحة المطلوبة هي

$$\bar{x}=\frac{\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{1}{2}r^{2}\,d\theta\,.\,\rho\right)\frac{2}{3}r\cos\theta}{\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^{2}\,d\theta\,.\,\rho}\quad,\quad \bar{y}=\frac{\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{1}{2}r^{2}\,d\theta\,.\,\rho\right)\frac{2}{3}r\sin\theta}{\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^{2}\,d\theta\,.\,\rho}$$

مثال (٨) : أوجد مركز كتلة صفيحة منتظمة رقيقة على هيئة قطاع دائـوي يقابل زاوية مركزية قائمة.



الحل : واضح من الشكل أن محور x محور تماثل أي ينصف زاوية القطاع ومنه نجد أن $\bar{y}=0$

عنصر الكتلة $d\,m$ هو

$$d\,m=\frac{1}{2}r^{2}\,d\theta\,.\,\rho$$

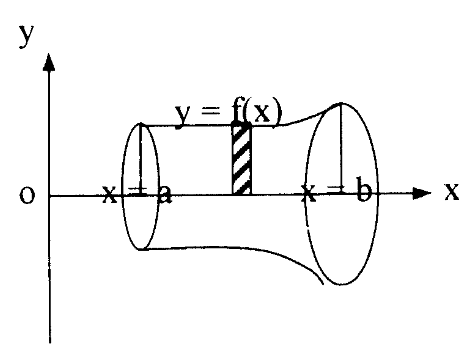
ومركز كتلته هو $\left(\frac{2}{3}r\cos\theta,\frac{2}{3}r\sin\theta\right)$

ويلاحظ هنا أن كثافة السطح ثابتة وأن متجه الموضع r أيضاً مقـدار ثـابت $r=a$

$$\therefore\quad \bar{x}=\frac{\frac{2}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta}{\int_{-\pi/4}^{\pi/4}d\theta}=\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\pi}a$$

$\therefore$ مركز الكتلة هو $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}a\,,0\right)$

ثالثاً : مركز كتلة حجم دوراني :



ليكن لدينا الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحنى $y = f(x)$، والمحور x، المستقيمين $x = a$، $x = b$ نقسم المساحة المذكورة إلى شرائح صغيرة على هيئة مستطيلات ونعتبر الحجم الناتج من دوران إحدى هذه الشرائح حول المحور x.

∴ عنصر الكتلة الناتج من هذا الدوران يعطى من

$$dm = \left(\pi y^2\right) dx \,.\, \rho$$

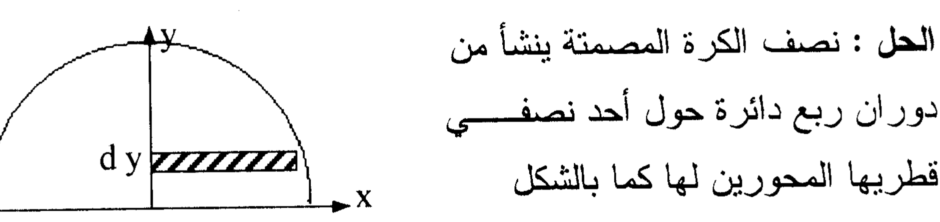
حيث ρ الكثافة الحجمية. ومركز كتلة هذا العنصر $(x, 0)$. عندئذ من التماثل نجد أن $\bar{y} = 0$

مركز كتلة الحجم المطلوب هو

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\left(\pi y^2\right)\rho\, dx}{\int_a^b \pi y^2 \rho\, dx}$$

مثال (٩) : أوجد مركز كتلة نصف كرة مصمتة منتظمة.

الحل : نصف الكرة المصمتة ينشأ من دوران ربع دائرة حول أحد نصفي قطريها المحورين لها كما بالشكل



$$\therefore\ dm = \left(\pi x^2\, dy\right)\rho$$

ومركز كتلة هذا العنصر هو $(0, y)$

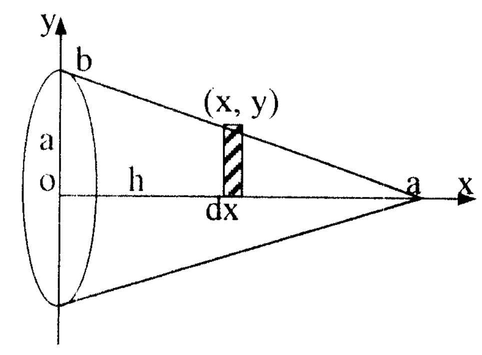
واضح أن $\bar{x} = 0$ ومن ذلك فإن مركز كتلة نصف الكرة المصمتة هو

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b x^2\, y\, dy}{\int_a^b x^2\, dy}$$

ولكن من المعادلة $x^2 + y^2 = a^2$ يمكن التعويض عن قيمة x بدلالة y ومنها نجد أن

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y\left(a^2 - y^2\right) dy}{\int_a^b \left(a^2 - y^2\right) dy} = \frac{3a}{8}$$

مثال (١٠) : أوجد مركز كتلة مخروط دائري قائم الزاوية مصمت منتظم الكثافة وارتفاعه h ونصف قطر قاعدته a.



الحل : واضح كما بالشكل فإن المخروط المصمت ينشأ من دوران المثلث القائم الزاوية oab حول المحور ox. عندئذ عنصر الكتلة هو

$$dm = \pi y^2\, dx\,.\,\rho$$

ومركز كتلته هو $(x, 0)$

وواضح من التماثل أن $\bar{y} = 0$ ومنه يمكن إيجاد

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h x\, y^2\, dx}{\int_0^h y^2\, dx}$$

لكن معادلة الراسم a b هي

$$\frac{x}{h} = \frac{y}{a} = 1$$

$$\therefore \quad y = a\left(1 - \frac{x}{h}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h x\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx}{\int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx} = \frac{h}{4}$$

تمارين

(١) إذا كانت o قطب المنحنى $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ، G مركز كتلة القوس AB من هذا المنحنى أثبت أن oG ينصف الزاوية AoB

(٢) أوجد مركز كتلة المساحة المحدودة بالمنحنى $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ والاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

(٣) أوجد مركز كتلة قطاع من دائرة عندما تتناسب كثافتها السطحية مع المسافة من مركزه.

(٤) أوجد مركز كتلة جزء من سطح كرة محصور بين مستويين متوازيين على بعدي r_1, r_2 من مركز الكرة.

(٥) أوجد مركز كتلة الحجم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \frac{b}{a^2} x^2$ حول محور x بين المستويين x = a، x = 0.

الباب الرابع
الإحتكاك
Friction

مقدمة :

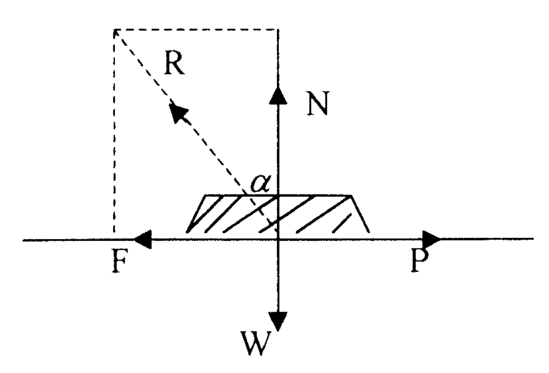
للإحتكاك دوراً هاماً في حياتنا اليومية فله أهمية وفائدة كبرى، إذ أنه يمنع إنزلاق الإنسان أثناء المشي بل يساعد على المشي، كما أن الإحتكاك يساعد على حركة عجلات المركبات وبدونه تنزلق العجلات دون حركة المركبة نفسها. كما يحدث عند انزلاق عجلات السيارة على الأرض الموحلة أو إنزلاق عجلات القطار على القضبان المشحمة، وفي هذه الحالات يلزم قدرة أكبر لشد السيارة أو القطار على القضبان المشحمة. وعند تأثير الفرامل على الإطارات فإن الإحتكاك يعمل على تهدئة أو إيقاف دوران العجل إلا أنه لولا خشونة الأرض نفسها لأستمرت العجلات في الانزلاق.

وفي كثير من الأحيان يكون جهد المصمم أو المهندس هو تقليل الإحتكاك في أجزاء الماكينات بتزييت هذه الأجزاء، وذلك لتقليل القدرة المفقودة في الإحتكاك ولزيادة عمر الأجزاء المتحركة.

١ـ قوى الإحتكاك Friction Forces

إذا تلامس جسمان أملسان نشأ بينهما رد فعل عمودي على السطحين عند نقطة التماس.

أما إذا كان الجسمان خشنان وكانت هناك قابليـــة لجــدوث حركـــة إنزلاقية بينهما. ولو لم تحدث الحركة بالفعل فإن قوة الاحتكاك تنشأ بينـــهما على هيئة فعل ورد فعل عند نقطة تماس الجسمين وذلـــك فـــي المســتوى المماس لهما عند تلك النقطة. هذا علاوة على رد الفعل العمودي على ذلــك المستوى. وتعمل قوة الإحتكاك على عرقلة الانزلاق النسبي بين الجسمين.



في الشكل السابق إذا أثرت قوة سحب P على الجسم، تولدت فـــي الجســم قابلية انزلاقة في اتجاه تأثير P ونشأت على الفور قوة احتكاك F في الاتجاه المضاد لعرقلة هذا الانزلاق.

٢ــ قوانين الاحتكاك :

١ــ اتجاه الاحتكاك يضاد الاتجاه الذي نحاول تحريك الجسم فيه.

٢ــ مقدار الاحتكاك يكفي فقط لحفظ الاتزان. ولقوة الاحتكاك حد أقصـــى يسمى الاحتكاك النهائي Limiting friction. أي أن قوة الاحتكاك يمكـن أن تزيد بتغير القوى الأخرى المؤثرة على الجسم إلى أن تبلـــغ قيمــة نهائية عندها يختل اتزان الجسم وتبـــدأ الحركـــة. ويمكـــن أن ينعـــدم الاحتكاك بين جسمين خشنين وذلك إذا كانت كل القوى الأخرى المؤثرة

على الجسم عمودية على سطح التماس المشترك بين الجسمين الخشنين عند نقطة التماس.

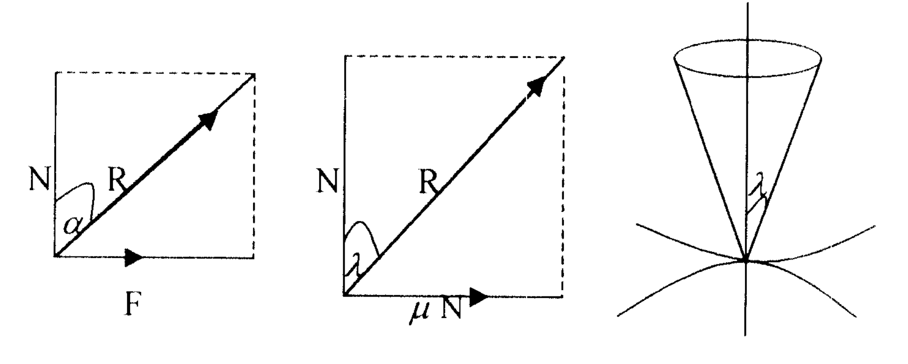
٣ـ النسبة بين الاحتكاك النهائي ورد الفعل العمودي لكل مادتين متلامستين نسبة ثابتة، فإذا كان رد الفعل العمودي N يكون الاحتكاك النهائي μ N حيث μ ثابت يتوقف على طبيعة المواد المتلامسة ويسمى معامل الاحتكاك Coefficient of friction. وتتراوح قيمة معامل الاحتكاك بين الصفر (المواد الملساء) والوحده.

٤ـ مقدار الاحتكاك النهائي لا يتوقف على المساحات المتلامسة.

٥ـ تقل قيمة معامل الاحتكاك لجسمين متحركين بحوالي 25% من قيمتها في حالة إتزان الجسمين. ولا يتوقف معامل الاحتكاك على سرعة الجسمين.

٣ـ زاوية الاحتكاك ومخروط الاحتكاك :

Angle and Cone of Friction :



تسمى الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودي N ورد الفعل المحصل R بزاوية الاحتكاك ويرمز لها بالرمز α . واضح أن :

$$\tan\alpha = \frac{F}{N} \quad , \quad \therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{F}{N}$$

وتزداد α من الصفر (للأجسام الملساء) وتصل لأكبر قيمة λ في حالة الأجسام الخشنة عندما يكون الاحتكاك نهائياً. تسمى λ زاوية الاحتكاك النهائي ونلاحظ أن :

$$\tan\lambda = \frac{\mu N}{N} = \mu$$

كذلك يقع رد الفعل المحصل داخل أو على سطح مخروط رأسه نقطة التماس المشتركة بين السطحين الخشنين ومحوره العمود المشترك على سطح التماس وزاويته النصف رأسية λ . يسمى هذا المخروط مخروط الاحتكاك.

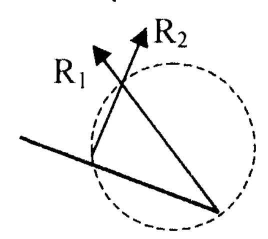
ملاحظات :

١ــ إذا تلامس جسمان أملسان لا يتولد بينهما أي إحتكاك. ويكون رد الفعل بينهما عمودياً على المستوى المماس للجسمين عند نقطة التماس.

٢ــ إذا ارتكز قضيب بإحدى طرفيه على مستوى أملس كان رد الفعل عمودياً على المستوى.

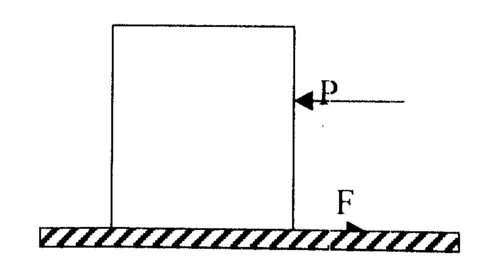
- إذا ارتكز القضيب بإحدى نقطه على وتد أملس كان رد الفعل عمودياً على القضيب.

- وإذا ارتكز القضيب على السطح الخارجي لكرة أو سلك دائري أملس كان رد الفعل عمودياً على الكرة أو السلك الدائري ماراً بالمركز.
- إذا استند قضيب على السطح الداخلي لإناء نصف كروي أملس مرتكزا بإحدى طرفيه على الإناء كما بالشكل يكون رد الفعل R_1 عموديا على الإناء ماراً بمركزه ورد الفعل R_2 عمودياً على القضيب ويتقاطع ردا الفعل على امتداد السطح نصف الكروي.



٤ـ الانقلاب والانزلاق :

إذا أثرت قوة أفقية P على اسطوانة موضوعة على مستوى أفقي أملس فإنها تنزلق على المستوى مهما كانت P صغيرة. أما إذا كان المستوى خشناً وأثرت قوة أفقية صغيرة P على الأسطوانة، يتولد قوة إحتكاك F = P صغيرة تكفي فقط لحفظ الاتزان. وبإزدياد مقدار P تزداد قيمة F وتظل مساوية لها إلى أن يختل الاتزان.



اختلال الاتزان بالانزلاق :

عندما يبدأ جسم في الانزلاق على جسم آخر تكون قوة الاحتكاك F قد بلغت قيمتها النهائية μ N وهذا يعني أن رد الفعل المحصل يصنع زاوية λ مع العمودي المشترك للسطحين المتلامسين.

اختلال الاتزان بالانقلاب :

عندما ينقلب جسم ملامس لجسم آخر فإنه يدور حول نقطة (خط) وتكون هذه النقطة (الخط) ساكنة في بداية الانقلاب. وهذا يعني أن قوة الاحتكاك F لا تكون قد بلغت قيمتها النهائية μ N أي أن $F < \mu N$. وتكون زاوية الاحتكاك أقل من λ . ويجب ملاحظة أن قوة الاحتكاك F تكون كبيرة لدرجة تكفي لمنع الانزلاق.

ولحل مسائل الانزلاق والانقلاب توجد طريقتان :

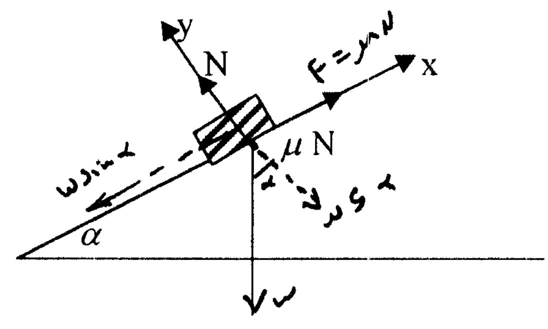
١ــ عندما يكون الجسم على وشك الانزلاق فيكون $F = \mu N$ ثم نوجد الشرط اللازم للانزلاق من ملاحظة أن مركبات القوى في اتجاه الانزلاق يجب أن تزيد عن مركبات القوى في الاتجاه المضاد. وإذا كان الجسم على وشك الانقلاب فيكون $F < \mu N$ ونوجد الشرط اللازم للإنقلاب مع ملاحظة أن مجموع عزوم القوى التي تساعد على الانقلاب يجب أن تزيد عن مجموع عزوم القوى في الاتجاه المضاد.

٢ــ نفرض أن الجسم على وشك الانقلاب ونكتب الشرط اللازم لذلك مع ملاحظة أن زاوية الاحتكاك تقل عن λ .

وسنوضح هذه الطرق الأمثلة التالية :

مثال (١) : جسم وزنه W موضوع على مستوى مائل. أوجد أكبر زاوية يمكن أن يميل بها هذا المستوى بحيث يظل الجسم متزن.

الحل :



يكون ميل المستوى أكبر ما يمكن عندما يكون الجسم على وشك الحركة إلى أسفل المستوى، وفي هذه الحالة تتجه قوة الاحتكاك إلى أعلى المستوى وتصل قيمتها إلى القيمة النهائية أي أن :

$$F = \mu N$$

وعندئذ فإن شرط الاتزان (مجموع مركبات القوى في اتجاه كل من محوري الإحداثيات x, y يساوي الصفر) يعطي :

$$\mu N - W \sin\alpha = 0$$

$$N - W \cos\alpha = 0$$

ومنها نجد أن :

$$\tan\alpha = \mu = \tan\lambda$$

أي أن $\alpha = \lambda$ حيث λ زاوية الاحتكاك.

أي أن أكبر زاوية يمكن أن يميل بها المستوى ويظل الجسم في حالة اتزان هي زاوية الاحتكاك.

في حالة البحث عن كل زوايا ميل المستوى α الممكنة لأوضاع الانزلاق المختلفة يجب إستبدال قوة الاحتكاك النهائي μ N بقوة الاحتكاك F وبذلك نحصل على

$$F = W \sin\alpha \leq \mu N = \mu W \cos\alpha$$

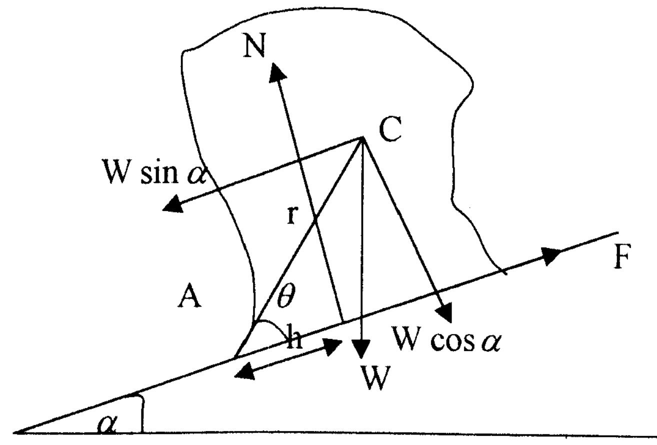
$$\therefore \sin\alpha \leq \mu \cos\alpha$$

$$\tan\alpha \leq \mu = \tan\lambda$$

$$\alpha \leq \lambda$$

أي أن الاتزان يكون ممكناً لكل زوايا ميل المستوى التي لا تتعدى زاوية الاحتكاك.

مثال (٢) : إذا إتزن جسم قاعدته مسطحه على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية α ، فإنه يتزن تحت تأثير وزنه W الذي يؤثر في مركز ثقله C إلى أسفل ومركبتي رد الفعل. حيث قوة الاحتكاك F في اتجاه المستوى إلى أعلى ورد الفعل العمودي N الذي يؤثر على بعد h من أسفل نقطة من الجسم A.



الشرط الضروري والكافي للاتزان هو :

١ــ مجموع مركبات القوى في كل من اتجاه المستوى والعمودي عليه يساوي الصفر.

$$F = W\sin\alpha \quad , \; N = W\cos\alpha$$

٢ــ مجموع عزوم القوى حول A يساوي الصفر.

$$N\,h + W\sin\alpha \,.\, r\sin\theta \; - W\cos\alpha \,.\, r\cos\theta = 0$$

حيث r,θ الإحداثيات القطبية لمركز الثقل C بالنسبة للنقطة A.

نلاحظ أنه بازدياد زاوية ميل المستوى α تزداد مركبة الوزن في اتجاه المستوى $W\sin\alpha$ ويتبع ذلك زيادة قيمة الاحتكاك F ونقص المسافة h. فإذا وصلت قوة الاحتكاك إلى قيمتها النهائية قبل أن تتلاشى المسافة h فإن الجسم يصبح على وشك الانزلاق، ويبدأ بذلك الانزلاق قبل الانقلاب. أما إذا تلاشت المسافة h قبل أن يصل قوى الاحتكاك إلى قيمتها النهائية فإن الجسم يصبح على وشك الانقلاب، ويبدأ الانقلاب قبل الانزلاق، أي أنه عندما يكون الجسم على وشك الانزلاق فإن :

$$F = \mu N$$

بالتعويض بهذه القيمة في شرط الانزلاق نحصل على :

$$\sin\alpha = \mu\cos\alpha$$

$$\therefore \; \alpha = \lambda$$

وبذلك نحصل على الصورة الآتية لقيم α المختلفة

$\alpha < \lambda$	لا يحدث انزلاق
$\alpha = \lambda$	الجسم على وشك الانزلاق

$\alpha > \lambda$ ينزلق الجسم.

ومن جهة أخرى عندما يكون الجسم على وشك الانقلاب نضع $h = 0$ فإن شرط الانقلاب يأخذ الصورة :

$$\sin\alpha \ \sin\theta = \cos\alpha \cos\theta$$
$$\tan\alpha = \cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

أي أن

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$$

وبذلك نحصل على الصورة الآتية لقيم α المختلفة

$\alpha < \frac{\pi}{2} - \theta$ لا يحدث إنقلاب.

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ الجسم على وشك الانقلاب.

$\alpha > \frac{\pi}{2} - \theta$ ينقلب الجسم.

مما سبق يتضح أنه لكي ينزلق الجسم قبل أن ينقلب يجب أن يكون

$$\lambda < \alpha < \frac{\pi}{2} - \theta$$

أي أن :

$$\alpha > \lambda \ , \ \alpha + \theta < \frac{\pi}{2}$$

أما إذا كانت

$$\lambda > \alpha > \frac{\pi}{2} - \theta$$

أي :

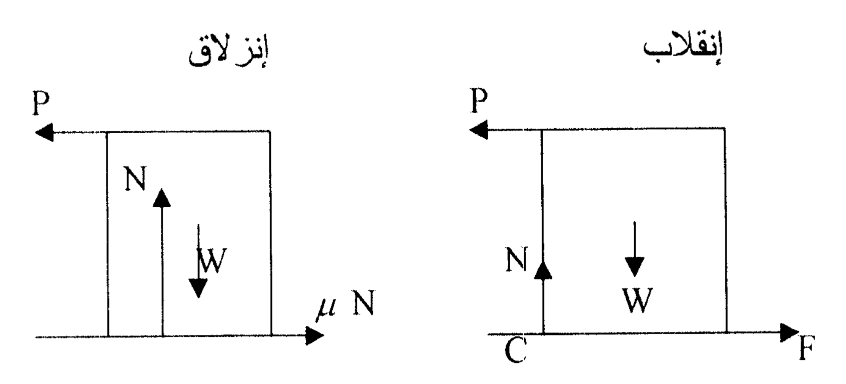
$$\alpha < \lambda \ , \ \alpha + \theta > \frac{\pi}{2}$$

فإن الجسم ينقلب قبل أن ينزلق.

مثال (٣) : وضع متوازي مستطيلات منتظم طول ضلع قاعدته المربعة 2 a وارتفاعه 2 b على منضده أفقية خشنة معامل إحتكاكها μ . أثــرت قــوة أفقية في منتصف أحد الأطراف العليا لأحد الأوجه الرأسية بحيــث تكــون عمودية على هذا الحرف وازداد مقدار القوة حتى اختل التوازن.

أثبت أن الجسم ينقلب أو ينزلق على حساب ما إذا كان $\mu \gtrless \frac{a}{2b}$.

الحل :



أولاً : نفرض أن الاتزان يختل بالانزلاق

$$\therefore \ N = W \ , \ P > \mu N$$

$$\therefore \ P > \mu W \qquad (1)$$

نفرض بعد ذلك أن الاتزان يختل بالانقلاب حول C. بأخذ العزوم حــول C نجد أن :

$$P\,.\,2\,b > W\,a$$

$$\therefore\ P > \frac{W\,a}{2\,b} \qquad (2)$$

المعادلتان (1)، (2) هما شرطي الانزلاق والانقلاب على الترتيب. نستنتج مما سبق أنه إذا كان

$$\mu < \frac{a}{2\,b}$$

يحدث الانزلاق. أما إذا كان

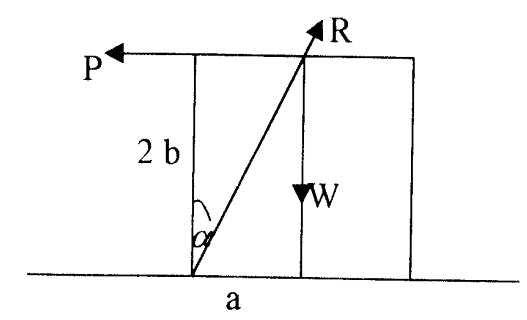
$$\mu > \frac{a}{2\,b}$$

يحدث الانقلاب. بينما إذا كان

$$\mu = \frac{a}{2\,b}$$

يحدث الانزلاق والانقلاب في نفس الوقت.

ثانياً : عندما يكون الجسم على وشك الانقلاب يبدأ في الدوران حول الحرف C ويمر رد الفعل المحصل R عند C بنقطة تقاطع القوتين P, W



شرط الانقلاب هو $\alpha < \lambda$

$$\tan\alpha < \tan\lambda$$

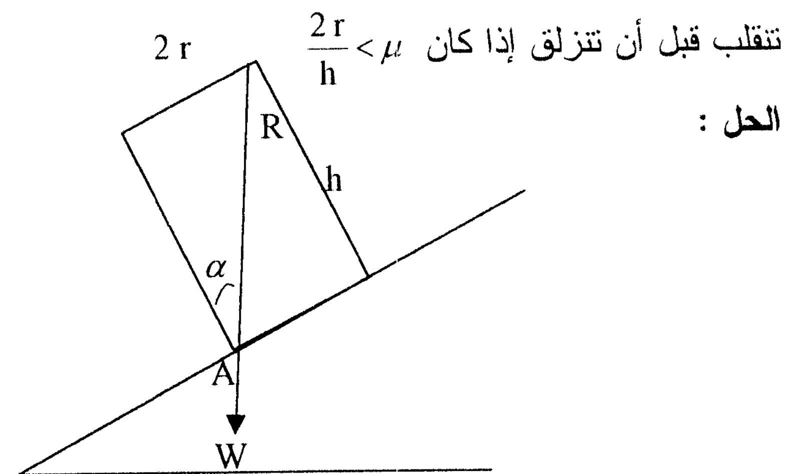
$$\frac{a}{2\,b} < \mu$$

هذا هو نفس الشرط الذي حصلنا عليه في أولاً وواضح أيضـــــاً أن شـــرط الانزلاق هو

$$\frac{a}{2b} > \mu$$

مثال (٤) : وضعت اسطوانة منتظمة نصف قطرها r وارتفاعها h بقاعدتها على مستوى خشن مائل وازداد ميل المستوى بالتدريج. أثبت أن الأسطوانة تنقلب قبل أن تنزلق إذا كان $\frac{2r}{h} < \mu$

الحل :



عندما تكون الاسطوانة على وشك الانقلاب يكون رد الفعل المحصل عنـــد نقطة الدوران A رأسياً لأعلى على امتداد الوزنW. فتكون زاوية الاحتكاك مساوية لزاوية ميل المستوى α على الأفقي.

شرط الانقلاب هو $\alpha < \lambda$

$$\therefore \tan\alpha < \tan\lambda$$

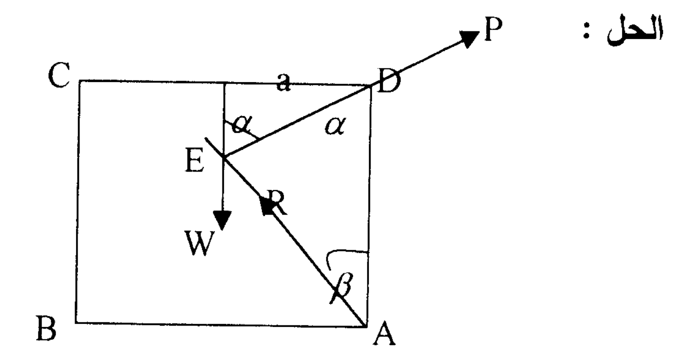
$$\therefore \frac{2r}{h} < \mu$$

وهو الشرط المطلوب.

مثال (٥) : يمثل المربع ABCD مكعباً ينطبق وجهه AB على مستوى أفقي خشن زاوية احتكاكه λ . ربط خيط في D على بكرة مثبتة عند E ويتدلى من نهايته الأخرى وزن P. إذا كانت زاوية ميل DE على الرأسي هي α .
فأثبت أن المكعب يدور منقلباً حول A دون أن ينزلق إذا كان

$$\cot\lambda + \cot\alpha < 2$$

الحل :



عندما يكون المكعب على وشك الانقلاب فإنه يبدأ في الدوران حول A ويمر رد الفعل المحصل R عند النقطة A بنقطة تقاطع الشد P مع الوزن W.

إذا كان طول ضلع المربع 2 a فإن :

$$ED = \frac{a}{\sin\alpha}$$

وبتطبيق قاعدة الجيب على المثلث ADE نحصل على :

$$\frac{ED}{\sin\beta} = \frac{2\,a}{\sin AED}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{2\,a}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = 2\sin\alpha\sin\beta$$

بالقسمة على $\sin\alpha \sin\beta$

$$\therefore \cot\beta + \cot\alpha = 2 \qquad (1)$$

شرط انقلاب المربع هو

$$\beta < \lambda$$

$$\therefore \cot\beta < \cot\lambda \qquad (2)$$

من (1)، (2) نحصل على :

$$2 - \cot\alpha < \cot\lambda$$

$$\therefore \cot\lambda + \cot\alpha > 2.$$

٥ــ دراسة اتزان الأجسام الخشنة :

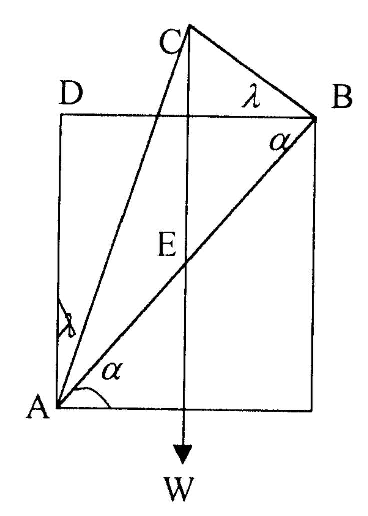
من الأنواع الهامة في مسائل الاحتكاك ما يأتي :

١ــ المسائل التي تشتمل على جسم في حالة اتزان نهائي ومعامل الاحتكاك معلوماً ويطلب فيها تعيين قوة خارجية من القوى المؤثرة على الجسم.

٢ــ مسائل يكون معلوماً فيها أجسام في حالة اتزان نهائي تحت تأثير قوى خارجية كلها معلومة ويكون المطلوب فيها تعيين معامل الاحتكاك. وعند حل مثل هذه المسائل نستعمل زاوية الاحتكاك λ بدلاً من معامل الاحتكاك ورد الفعل المحصل بدلاً من مركبتيه.

مثال (٦) : يتزن قضيب منتظم في مستوى رأسي بإحدى طرفيه على حائط خشن والطرف الآخر على أرض أفقية لها نفس خشونة الحائط. إذا كان الاحتكاك عند طرفي القضيب نهائياً وميل القضيب على الأفقي α . فأثبت أن زاوية الاحتكاك $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$.

الحل :



يصنع رد الفعل المحصل عند A زاوية λ مع العمودي على الأرض وكذلك يصنع رد الفعل المحصل عند B زاوية λ مع العمودي على الحائط كما في الشكل لذلك

$$A\hat{C}B = 90^\circ$$

الوزن W يجب أن يمر بنقطة تقاطع ردي الفعل المحصلين.

حيث أن E منتصف AB فإن : $EC = EB$

$$\therefore \; E\hat{C}B = E\hat{B}C$$

$$\therefore \; \frac{\pi}{2} - \lambda = \alpha + \lambda$$

$$\therefore \; \lambda = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

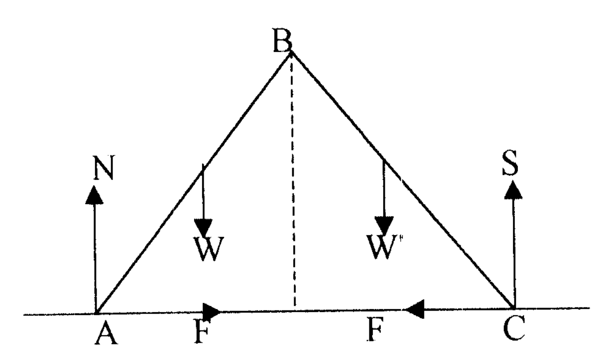
مثال (٧) : يتصل سلمان منتظمان AB, BC لهما نفس الطول وزناهما W, W' (W > W') بمفصلة سهلة عند النهاية العليا B ويستندان على أرض خشنة. أثبت أن رد الفعل المحصل عند A يصنع زاوية مع الرأس أصغر

من التي يصنعها رد الفعل عند C. إذا كان معامل الاحتكاك عند كل من A, C هو μ فأثبت أنه بازدياد الزاوية المحصورة بين السلمين يبدأ الانـــزلاق عند C وأن

$$\mu = \tan\alpha \ \frac{W + W'}{W + 3W'}$$

حيث 2α هي الزاوية المحصورة بين السلمين عند لحظة حدوث الانزلاق.

الحل :



من اتزان السلمين معا نجد أن :

$$N + S = W + W' \qquad (1)$$

الاحتكاك A = الاحتكاك عند C يساوي F

بأخذ العزوم للسلمين معا حول B نجد

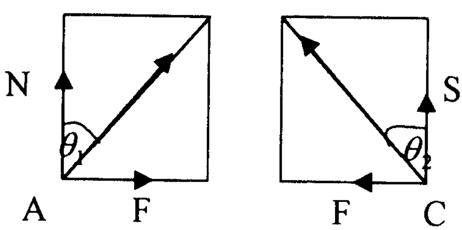
$$N \,.\, 2L + W' L = S \,.\, 2L + W \,.\, L$$

$$\therefore\ 2N = 2S + W - W' \qquad (2)$$

ولكن $W > W'$ فيكون

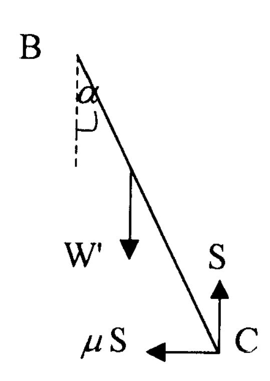
$$N > S$$

$$\therefore\ \theta_1 > \theta_2$$



أي أن رد الفعل المحصل عند A يصنع مع الرأس زاوية أصغر من تلـــك عند C. معنى هذا أن الاحتكاك يبلغ قيمته النهائية عند C أولاً.

من دراسة الاتزان النهائي للقضيب BC وحده وبـــأخذ العـــزوم حـــول B نحصل على :



$$W'.a\sin\alpha + \mu S.2a\cos\alpha = S.2a\sin\alpha$$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{2\mu S}{2S - W'} \qquad (3)$$

من (1)، (2) نجد أن :

$$4S = W + 3W'$$

بالتعويض في (3) نحصل على :

$$\tan\alpha = \frac{(W + 3W')}{W + W'}\mu$$

$$\therefore \mu = \tan\alpha \frac{W + W'}{W + 3W'}$$

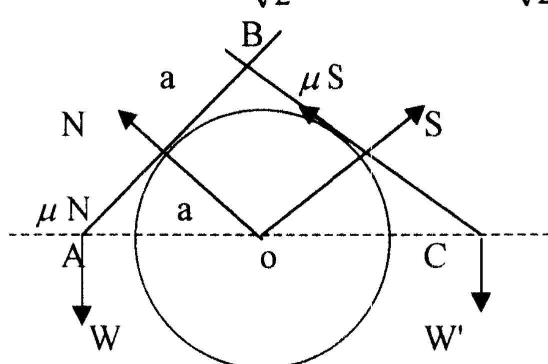
مثال (٨) : يتصل قضيبان خفيفان AB, BC طول كل منهما 2 a إتصالاً متماسكاً عند B بحيث يكونان متعامدين. وضع الجسم على اسطوانة دائرية خشنة مثبتة نصف قطرها a بحيث يكون القضيبان متساوي الميل على الرأس. علق وزنان W, W' (W' > W) من A, C على الترتيب فكان الجسم على وشك الانزلاق. أثبت أن :

$$\frac{W'}{W}=\frac{1+\mu+\mu^2}{1-\mu+\mu^2}$$

الحل :

من اتزان القضيبين معاً نجد بالتحليل الرأسي والأفقي وأخذ العزوم حول C أن :

$$W+W'+\mu\frac{N}{\sqrt{2}}=(N+S+\mu S)\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (1)$$



$$(N+\mu N+\mu S)\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{S}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

$$\mu\ Sa+\mu NS+W\sqrt{2}\,a=W'\sqrt{2}\,a \qquad (3)$$

أو

$$(1-\mu)N+(1+\mu)S=\sqrt{2}\,(W+W')$$

$$(1+\mu)+(\mu-1)S=0$$

$$\mu N+\mu S=\sqrt{2}\,(W'-W)$$

بحذف N, S نحصل على :

$$\begin{vmatrix} 1-\mu & 1+\mu & \sqrt{2}(W'+W) \\ 1+\mu & \mu-1 & 0 \\ \mu & \mu & \sqrt{2}(W'-W) \end{vmatrix}=0$$

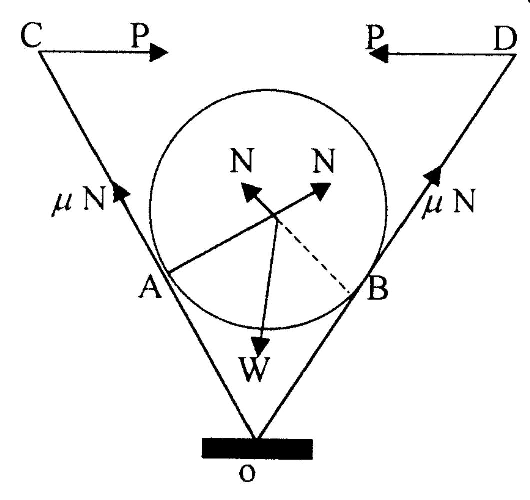
أي :

$$2\mu(W'+W)=(W'-W)\left\{(1-\mu)^2+(1+\mu)^2\right\}=0$$

$$\therefore\ \frac{W'+W}{W'-W}=\frac{1+\mu^2}{\mu}$$

$$\therefore\ \frac{W'}{W}=\frac{1+\mu+\mu^2}{1-\mu+\mu^2}$$

مثال (٩) : اسطوانة وزنها W ترتكز في وضع متماثل على لوحين خفيفين oC, oD يرتبطان بمفصل ثابت o كما بالشكل. المطلوب إيجاد حدود تغـــير القوتين الأفقيتين P لبقاء الاتزان علماً بأن نصف قطر الأسطوانة a وطـــول كل ممن اللوحين L.



الحل :

تعمل قوى الاحتكاك μN على الأسطوانة إلى أعلى كما يتماثل ردا الفعل العموديين N من اللوحين وعليهما. بالتحليل رأسيا للقوة المؤثرة على الأسطوانة نحصل على :

$$W = 2N(\sin\theta + \mu\cos\theta) \qquad (1)$$

بأخذ العزوم حول o لاتزان اللوح oBD نحصل على

$$P.L\cos\theta = N\,a\cot\theta \qquad (2)$$

وبحذف N بين (2) ,(1) نحصل على :

$$P = \frac{W\,a}{L}\cdot\frac{\operatorname{cosec}2\theta}{\tan\theta + \mu} \qquad (3)$$

بينما إذا كانت الاسطوانة على وشك الانزلاق إلى أعلى فيمكن الحصول على الحل من الحالة السابقة فقط بعكس إشارة μ في المعادلة (3).

$$P = \frac{W\,a}{L}\cdot\frac{\operatorname{cosec}2\theta}{\tan\theta - \mu} \qquad (4)$$

والعلاقة (4) تمثل الحد الأعلى لمقدار P.

٦ــ إحتكاك السيور والحبال :

إذا التف سير أو حبل حول جسم اسطواني ثابت خشن بحيث يتماسان على زاوية مركزية α وشد السير من أحد طرفيه ضد مقاومة في الطرف الآخر فإنه تنشأ ردود فعل عمودية ΔN على طول الجزء الملامس وقوى الاحتكاك ΔF تقاوم انزلاق السير كما في الشكل (١) وفي حالة الاتزان الحرج يبلغ الاحتكاك حده الأعلى $\mu\Delta N$.

وبمكاملة طرفي هذه المعادلة بين نقطتي بداية تماس السير ونهايته نحصل على :

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\alpha} \mu \, d\theta$$

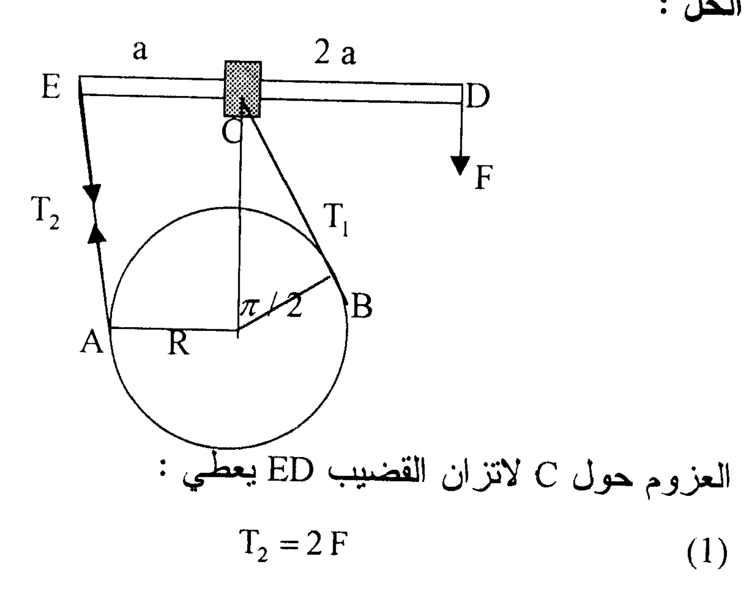
$$\log \frac{T_2}{T_1} = \mu \alpha$$

$$\therefore \; T_2 = T_1 \, e^{\mu \alpha} \qquad (3)$$

المعادلة (3) تبين العلاقة بين الشد الساحب T_2 والشد المقاوم T_1 ويتضح منها زيادة الشد الساحب زيادة كبيرة بزيادة زاوية التماس α .

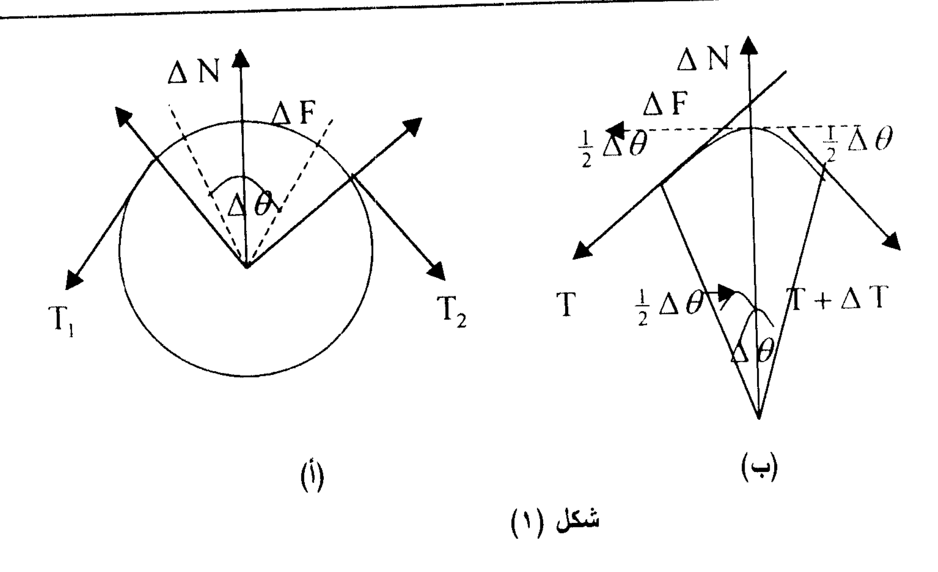
مثال (١٠): تؤثر قوة F في طرف رافعة ED قابلة للدوران حول مفصل ثابت C. EABC عبارة عن سير ملفوف حول طارة خشنية $\left(\mu = \frac{1}{2}\right)$ بغرض فرملتها. عين عزم مقاومة دوران الطارة الناشئ من احتكاك السير.

الحل :



العزوم حول C لاتزان القضيب ED يعطي :

$$T_2 = 2F \qquad (1)$$



شكل (١)

بدراسة اتزان جزء من السير يقابل زاوية مركزية $\Delta\theta$ (شكل (١) ب).
بالتحليل في اتجاه المماس والعمودي عند منتصف الجزء نحصل على :

$$(T+\Delta T)\cos\frac{\Delta\theta}{2} = T\cos\frac{\Delta\theta}{2} + \Delta F \qquad (1)$$

$$\Delta N = T\sin\frac{\Delta\theta}{2} = (T+\Delta T)\sin\frac{\Delta\theta}{2} \qquad (2)$$

ونظرا لصغر $\Delta\theta$ يمكن تعويض التقريب الآتي في المعادلتين (1)، (2)

$$\sin\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\Delta\theta}{2}\ ,\ \cos\frac{\Delta\theta}{2} = 1$$

وبإهمال كميات الدرجة الثانية في الصغر تؤول المعادلتان (1)، (2) إلى

$$\Delta T = \Delta F = \mu\ \Delta N$$

$$\Delta N = T\,\Delta\theta$$

وبحذف ΔN بينهما وأخذ النهايات نحصل على المعادلة الآتية :

$$\frac{dT}{T} = \mu\, d\theta$$

ثم بتطبيق المعادلة (3) على شدي السير T_1 , T_2 المؤثرين على الطارة نحصل على :

$$T_2 = T_1 e^{\frac{1}{2} \times \frac{5\pi}{4}} = 7 T_1 \qquad (2)$$

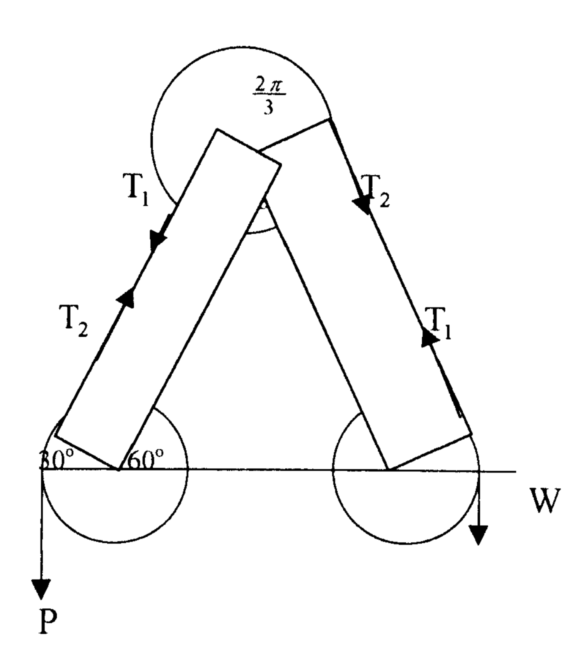
بأخذ العزوم حول مركز الطارة نحصل على عزم مقاومة دورانها M الناشئ من احتكاك السير

$$\therefore \; M = (T_2 - T_1) R = \left(2F - \frac{2F}{7}\right) R$$

$$= \frac{12}{7} F R$$

مثال (١١) : ثلاثة أوتاد متساوية نصف قطر كل منها a وضعت عند رؤوس المثلث المتساوي الأوضاع ABC بحيث كان BC أفقيا والرأس A أعلى BC لف خيط حول الثلاث أوتاد وأثر في أحد أطرافه الوزن W. أوجد القوة P التي يجب أن تؤثر في الطرف الآخر من الخيط حتى لا ينزلق.

الحل :



بتطبيق العلاقة (3) نحصل على

$$W = T_1 \, e^{\mu \frac{\pi}{6}}$$
$$T_1 = T_2 \, e^{\mu \frac{\pi}{3}}$$
$$T_2 = P \, e^{\mu \frac{\pi}{6}}$$

مما سبق نحصل على :

$$P = W \, e^{\mu \pi}$$

تمارين

١ـ وضعت نصف اسطوانة نصف قطرها a بقاعدتها المستوية على أرض خشنة. وضع قضيب منتظم طوله L ووزنه W عمودي على محور الأسطوانة ونهايته الأخرى على الأرض. فإذا كانت θ زاوية ميل القضيب مع الأفقي في وضع الاتزان ومعامل الاحتكاك بين القضيب والأسطوانة فاثبت أن

$$L = \sin^2\theta \ = a \sin 2\lambda$$

حيث λ زاوية الاحتكاك.

٢ـ وضع قضيب منتظم طوله 2 L داخل كرة نصف قطرها a في مستوى رأسي مارا بمركز الكرة. إذا كانت زاوية الاحتكاك بين القضيب والكرة هي λ . فأوجد أكبر ميل للقضيب على الأفقي إذا علم أن :

$$L < a \cos \lambda$$

٣ــ صفيحة على هيئة مثلث متساوي الأضلاع، ترتكز في وضع رأسي بأحد أضلاعها على مستوى أفقي خشن، وتؤثر قوة أفقية متزايدة عند الرأس العلوي للصفيحة وفي مستواها. أوجد أكبر قيمة لمعامل الاحتكاك بحيث تنزلق الصفيحة دون أن تنقلب.

٤ــ وضع مربع على مستوى مائل خشن بحث كان مستواه رأسيا وانطبق أحد أضلاعه على خط أكبر ميل، ربط خيط في رأس المربع العليا وشد في اتجاه يوازي خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى. أثبت أنه إذا زاد الشد بالتدريج فإن المربع ينزلق أو ينقلب حسبما يكون ميل المستوى أصغر أو أكبر من $\tan^{-1}(1-2\mu)$ حيث μ معامل الاحتكاك.

٥ــ قضيبيان منتظمان AB, BC لهما نفس الطول يرتبطان بمفصل أملس عند B وموضوعان في مستوى رأسي بحيث يرتكز الطرفان A, C على مستوى أفقي خشن. أثبت أنه إذا كان وزن أحد القضيبين ضعف وزن الآخر فإن أقل قيمة لمعامل الاحتكاك تكفي لحفظ الاتزان هي :

$$\frac{3}{5}\tan\left(\frac{A\hat{B}C}{2}\right)$$

٦ــ وضع قرص منتظم ثقيل على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية α . أثبت أنه يبدأ في التدحرج إذا كان $\mu = \tan\alpha$ حيث μ معامل احتكاك التدحرج.

٧ـ وضع قرص نصف قطره r ووزنه W على مستوى أفقي خشن بحيث كان مستواه رأسيا أثرت عليه قوة P في اتجاه المماس للقرص ويصنع زاوية θ مع الأفقي. فإذا كان القرص على وشك التدحرج فأثبت أن :

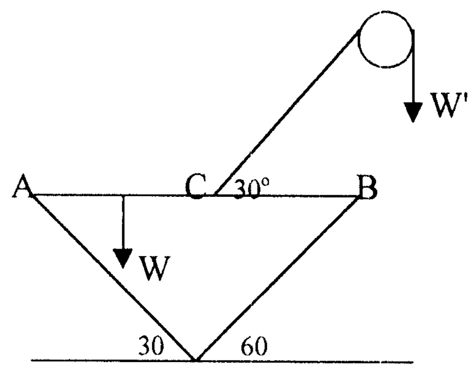
$$\frac{P}{W} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \cos(\theta - \alpha)}$$

وذلك بفرض أن معامل احتكاك التدحرج يتعين من

$$\mu = \tan\alpha$$

٨ـ سلم مزدوج طول كل من رجليه 5 ft. ووزنها W يرتكز في حالة اتزان حرج على أرض أفقية خشنة بينما كانت المسافة بين نقطتي ارتكاز الرجلين 6 ft. . عين معامل الاحتكاك.

٩ـ قضيب AB وزنه W يرتكز في وضع أفقي على مستويين مائلين خشنين ويحفظ اتزانه خيط مربوط في نقطة C واقعة في ثلث طول القضيب. ويمر الخيط فوق بكرة ثابتة حاملا في طرفه الآخر وزنا 'W كما بالشكل. أوجد أقل وأكبر قيمة للوزن 'W إذا علمت أن زاوية الاحتكاك 30°.

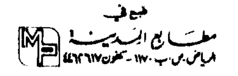


١٠ـــ مكعب وزنه W يراد سحبه إلى أعلى مستوى مائل خشن ميله α وزاوية احتكاكه λ عين أقل قوة P تكفي لسحب المكعب من حافته العليا وعين اتجاهها. عين أكبر ميل للمستوى بحيث لا ينقلب المكعب إذا أثرت عليه قوة السحب السابقة.

١١ـــ وضع قضيب منتظم يميل بزاوية α على الأفقي مستندا بإحدى طرفيه على حائط رأسي وطرفه الآخر على الأرض ومعامل الاحتكاك في كلتا الحالتين $\tan\lambda$ إذا كان القضيب واقعا في مستوى رأسي عمودي على مستوى الحائط. ومنع الانزلاق بخيط أفقي شده T متصل بالطرف الأسفل ثم بخيط رأسي شده 'T متصل بالطرف الأعلى فأثبت أن

$$T' = T\tan(\alpha + \lambda)$$




طبع في
مطابع المدينة
الرياض، ص.ب ١١٧٠ - تلفون ٤٦٢٦١٧